

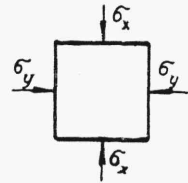
lub też, w razie, gdy jeden z wymiarów prostopadłościanu jest 1, (zadanie płaskie) będzie się równała:

$$dV = \frac{\sigma^2}{2E} dx \cdot dy \quad (723)$$

Wyobraźmy sobie w dalszym ciągu, że na sześcian o wymiarze 1 działają naprężenia normalne  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  w dwóch kierunkach (rys. 397). Wydłużenia jednostkowe równają się odpowiednio (vid. rozdz. V,2):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) \quad (724)$$

Wobec tego, że przy ciągnięciu i powolnym wzrastaniu sił, siła o każdej wartości 1. l.  $\sigma_x$  wykonywa pracę na drodze równej  $d\varepsilon_x$ , a siła 1. l.  $\sigma_y$  na drodze  $d\varepsilon_y$ , mamy tu, że



Rys. 397.

$$V'_1 = \int \sigma_x d\varepsilon_x = \frac{1}{E} \int \sigma_x (d\sigma_x - \mu d\sigma_y)$$

$$V'_2 = \int \sigma_y d\varepsilon_y = \frac{1}{E} \int \sigma_y (d\sigma_y - \mu d\sigma_x) \quad (725)$$

Dodając do siebie oba wzory (725), otrzymujemy, że jednostkowa energia sprężysta przy dwukierunkowym stanie naprężenia wynosi:

$$V' = V'_1 + V'_2 = \frac{1}{E} \int \left[ \sigma_x (d\sigma_x - \mu d\sigma_y) + \sigma_y (d\sigma_y - \mu d\sigma_x) \right] =$$

$$= \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \mu \sigma_x \sigma_y \right) \quad (726)$$

## 2. Energia sprężysta przy wyciąganiu i zginaniu.

Bierzemy pręt, obciążony siłą  $P$  (wyciągającą lub ściskającą).

W odległości  $x$  od przekroju utwierdzenia pręta wycinamy z niego płaszczyznami prostopadłymi do osi walec o wysokości nieskończenie małej  $dx$  i o podstawie  $A$ , równej polu danego przekroju pręta. Ponieważ

objętość walca równa się  $A dx$ , więc przypadająca nań ilość energii sprężystej wyniesie:

$$dV = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot A dx \quad (727)$$

gdzie  $\sigma$  oznacza naprężenie normalne równomiernie rozłożone na powierzchni danego przekroju pręta. W wypadku ogólnym  $\sigma = f_1(x)$  i  $A = f_2(x)$ , wobec czego energia sprężysta, zawarta w całym pręcie wyciąganym siłą  $P$ , może być otrzymana ze wzoru:

$$V = \int_0^l \frac{f_1^2(x) f_2(x)}{2E} \cdot dx \quad (728)$$

W szczególnym wypadku, gdy  $A$  jest stałe, a  $\sigma = \frac{P}{A}$ , otrzymujemy, że

$$V = \int_0^l \frac{P^2 \cdot A}{A^2 2E} \cdot dx = \frac{P^2 l}{2EA} \quad (729)$$

Oznaczamy całkowite wydłużenie pręta przez  $\Delta l = \frac{Pl}{EA}$  i nadajemy wzorowi (729) jeszcze dwie odmienne postacie następujące:

$$V = \frac{P \cdot \Delta l}{2} \quad V = \frac{\Delta l^2 EA}{2l} \quad (730)$$

Analogiczne wzory otrzymujemy dla pręta ściskanego.

Bierzemy belkę zginaną. Robimy przekrój poprzeczny, oddalony o  $x$  od końca belki i wyodrębniamy prostopadłościan nieskończenie mały, przylegający do tego przekroju. Wysokość prostopadłościanu wynosi  $dx$ , a jego podstawa równa się  $dA$ , gdzie  $A$  jest pole przekroju poprzecznego belki. Ilość energii sprężystej, nagromadzonej w prostopadłościanie wynosi:

$$dV = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot dx \cdot dA \quad (731)$$

Stąd energia sprężysta w całej belce będzie się równała:

$$V = \int_0^l \int_0^A \frac{\sigma^2}{2E} dx \cdot dA \quad (732)$$

Ponieważ  $\sigma = \frac{Mz}{J}$ , więc wzór (732) przybiera formę następującą:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^l \int_0^A \frac{M^2 z^2}{J^2} \cdot \frac{1}{2E} \cdot dx \cdot dA = \\ &= \int_0^l \frac{M^2}{J^2} \cdot \frac{1}{2E} dx \int_0^A z^2 dA = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} \end{aligned}$$

Wzór

$$V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} \quad (733)$$

stanowi analogję wzoru (723) dla energii sprężystej przy wyciąganiu.

W razie belki w jednym końcu utwierdzonej, a w drugim obciążonej siłą  $P$ , moment  $M = Px$ , skąd (vid. rys. 143 na str. 125):

$$V = \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2 l^3}{6EJ} \quad (734)$$

Wobec tego, że pionowe przesunięcie końca belki równa się:  $y = \frac{Pl^3}{3EJ}$ , mamy tu dla energii sprężystej jeszcze dwa następujące wzory:

$$V = \frac{1}{2} \cdot Py \quad \text{ i } \quad V = \frac{1}{2} \cdot \frac{3EJy^2}{l^3} \quad (735)$$

O ile na belce  $OP_1$  w jednym końcu ( $O$ ) utwierdzonej, znajdują się dwa ciężary  $P_1$  i  $P_2$ , wówczas moment  $M$ , który dla obliczenia energii sprężystej należy wstawić we wzór (733), równa się (rys. 398):

$$M = P_1 l_1 + (P_1 + P_2) x$$

na odcinku  $OP_2$ , lub

$$M = P_1 x_1$$

na odcinku  $P_1 P_2$ .

Tu  $l_1$  oznacza odległość ciężaru  $P_2$  od swobodnego końca belki, do którego jest zaczepiony ciężar  $P_1$ .

Ilość energii sprężystej, zawartej w części belki między przekrojem utwierdzenia a siłą  $P_2$ , wyniesie:

$$V_1 = \int_0^{l_2} \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^{l_2} \frac{[P_1 l_1 + (P_1 + P_2)x]^2}{2EJ} \cdot dx =$$

$$= \frac{P_1^2 l_1^2 l_2}{2EJ} + \frac{(P_1 + P_2)^2 l_2^3}{6EJ} + \frac{P_1 l_1 (P_1 + P_2) l_2^2}{6EJ}$$

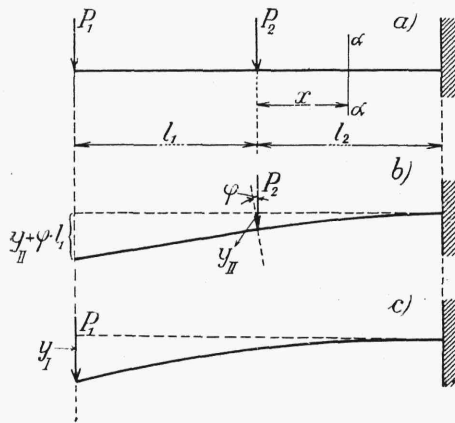
Część energii sprężystej, odpowiadająca odcinkowi między siłami  $P_1$  i  $P_2$ , równa się:

$$V_2 = \frac{P_1^2 l_1^3}{6EJ}$$

Całkowitą ilość energii sprężystej, zawartej w belce, otrzymamy drogą dodawania:

$$V = V_1 + V_2 \quad (736)$$

Ugięcia  $y_1$  i  $y_2$  danej belki pod siłami  $P_1$  i  $P_2$  wyznaczyć możemy bądź bezpośrednio na podstawie wzorów ogólnych, zawartych w rozdz. VII,5, bądź też drogą dodawania ugięć otrzymanych



Rys. 398.

w punktach zaczepienia sił  $P_1$  i  $P_2$  kolejno pod wpływem każdej z tych dwu sił (rys. 398a i b). Będziemy wówczas mieli:

$$y_1 = y_{II} + \varphi l_1 + y_I = \frac{P_2 l_2^3}{3EJ} + \frac{P_2 l_2^2}{2EJ} l_1 + \frac{P_1 (l_1 + l_2)^3}{3EJ}$$

$$y_2 = \frac{P_1 l_2^3}{3EJ} + \frac{P_2 l_2^3}{3EJ} + \frac{P_1 l_1 l_2^2}{2EJ}$$

Wstawiając ugięcia  $y_1$  i  $y_2$  we wzory dla  $V_1$  i  $V_2$ , otrzymamy następujący wzór dla energii sprężystej:

$$V = \frac{1}{2} P_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} P_2 \cdot y_2 \quad (737)$$

Wzory (730), (735) i (737) znajdują uogólnienie w tak zwanem twierdzeniu Clapeyron'a, omówionym w paragrafie następnym.

Omówione wyżej wzory dla energii sprężystej mogą być zastosowane również i wówczas, gdy do budowli, zamiast sił, zaczepimy pary sił. W tym wypadku zaczepione momenty uważamy za tak zwane uogólnione siły. Obroty przekrojów, do których zostały momenty zaczepione, nazywamy odpowiednio uogólnionemi odkształceniami albo uogólnionemi współrzędnymi.

Gdy więc np. pręt jest utwierdzony w murze i obciążony na końcu momentem  $M$ , wówczas zawarta w nim energia sprężysta równa się, na podstawie wzoru (733) i rys. 144,

$$V = \frac{M^2 l}{2 EJ} \quad (738)$$

Ponieważ obrót końcowego przekroju pręta  $\varphi = \frac{M \cdot l}{EJ}$ , mamy więc:

$$V = \frac{1}{2} M \cdot \varphi \quad (739)$$

Uogólniając powyższe, możemy powiedzieć, że jeżeli wyobrazimy sobie energję sprężystą, jako poprzedzony przez stałą liczbę  $\frac{1}{2}$  iloczyn dwóch czynników, to jeden z nich nazywamy siłą uogólnioną, a drugi uogólnioną współrzędną. Siłami uogólnionemi mogą więc być momenty, obciążenia jednostkowe, grupy sił i t. p.

Przypuśćmy, iż chcemy obliczyć energję sprężystą, nagromadzoną w odcinku łuku o długości  $s$ .

Bierzemy klin tego łuku o nieskończenie małym kącie  $d\varphi$  (rys. 296, rozdz. XIII, 3). Pod działaniem osiowej siły ściskającej  $N$  i momentu zginającego  $M$  klin dozna wydłużenia  $\Delta ds$ , przyczem ograniczające go płaszczyzny normalne do osi doznają nachylenia względem siebie o kąt  $\Delta d\varphi$ . Przyjmując wielkości  $\Delta ds$  i  $\Delta d\varphi$  za uogólnione współrzędne zadania, a wielkości  $N$  i  $M$  za uogólnione siły, otrzymamy następujący wzór dla energii sprężystej, nagromadzonej w klinie:

$$dV = \frac{1}{2} (M \Delta d\varphi + N \Delta ds) \quad (740)$$

Wstawiając tu, zamiast  $\Delta\varphi$  i  $\Delta l$ , ich wartości ze wzorów (516) i (518) z rozdz. XIII,3 i wykonując całkowanie w granicach od 0 do  $s$ , dojdziemy do wzoru dla  $V$ .

Pomijając we wzorach dla  $\Delta ds$  i  $\Delta\varphi$  wyraz zawierający  $r^2$  w mianowniku i przyjmując, że  $J = Y$ , otrzymujemy:

$$V = \int_0^s \left( \frac{M^2}{2 EJ} + \frac{MN}{EA r} + \frac{N^2}{2 EA} \right) ds \quad (741)$$

Pomijając tu również i wyraz zawierający  $r$  w mianowniku, znajdujemy:

$$V = \int_0^s \left( \frac{M^2}{2 EJ} + \frac{N^2}{2 EA} \right) ds \quad (742)$$

### 3. Energia sprężysta, jako jednorodna funkcja sił.

Wzór (729) wyprowadzony dla energii sprężystej pręta wyciąganego (lub ściskanego) może być zastosowany i do obliczenia energii sprężystej nagromadzonej przy odkształceniu kratownicy przegubowej. W tym wypadku wzór dla energii sprężystej ma następującą postać:

$$V = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 l}{EA} \quad (743)$$

gdzie  $S$  są to siły w prętach kratownicy.

Równanie (743) może być przekształcone na podstawie zasady prac wirtualnych.

Jako możliwe (wirtualne) przesunięcia poszczególnych węzłów kratownicy przyjmujemy tu przesunięcia  $v$  tych węzłów w kierunku działania zaczepionych do nich sił zewnętrznych oraz odległości  $\Delta l = \frac{S l}{EA}$ , na które poszczególne węzły pod działaniem tych sił zbliżyły się do siebie lub oddaliły. Siły zewnętrzne  $P$  i siły w prętach kratownicy  $S$  uważamy tu za jeden z tych układów sił, które mogą pracować wzdłuż wyżej przyjętych przesunięć wirtualnych. W ten sposób równanie prac wirtualnych (por. wzór 650, rozdz. XIV,5) przybiera tu postać następującą:

$$\sum S \cdot \frac{S \cdot l}{AE} = \sum P \cdot v$$