

ROZDZIAŁ XIV.

**Kratownice przegubowe.**

**1. Zależność między liczbą boków i węzłów.**

Przejmowanie działania sił zapomocą części budowli podlegających zginaniu przestaje być korzystnem, gdy w grę wchodzi belki o znacznych wymiarach poprzecznych. Pochodzi to stąd, że w belkach i prętach zginanych części przekrojów poprzecznych, zbliżone do osi obojętnej biorą tylko mały udział w zrównoważeniu sił zewnętrznych i dlatego nie są należycie wykorzystane. Najlepiej wykorzystany być może materiał w częściach wyciąganych budowli, które też są najdogodniejszym środkiem przejmowania sił zewnętrznych. Powstała stąd myśl zastąpienia belek pełnych przez kratowe, czyli przez obciążone w węzłach kratownice, przez co zginanie zostaje zastąpione przez wyciąganie lub ściskanie poszczególnych prętów.

Zauważyć przytem należy, że w prętach ściskanych kratownic materiał budowli nie może być wykorzystany równie dobrze, jak w prętach wyciąganych, gdyż przekroje tamtych prętów muszą być zwiększane ze względu na obawę wyboczenia. Wynika stąd, że kratownice należy projektować w ten sposób, aby pręty wyciągane w nich przeważały.

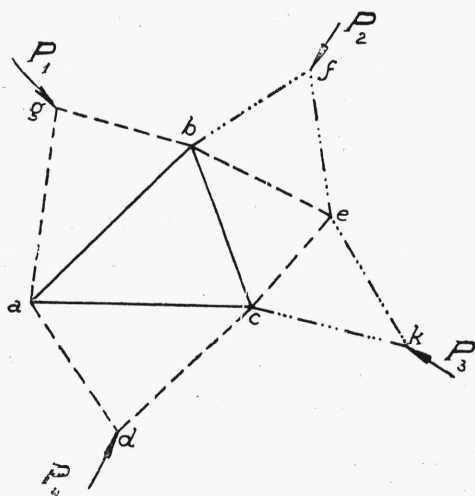
W większości obliczeń statycznych mamy do czynienia z kratownicami o węzłach przegubowych (por. rozdz. II, 6).

Najprostszym typem kratownicy jest kratownica złożona z trójkątów, dołączanych do siebie od zewnątrz.

Mamy więc np. trójkąt  $abc$  (rys. 337). Dołączamy do niego grupę trójkątów  $acd$ ,  $agb$  i  $bec$ . Każdy z punktów  $d, g, e$  został połączony z trójkątem  $abc$  zapomocą dwóch prętów. Tak samo i każdy z punktów  $f$  i  $k$  został dołączony do trójkąta  $bec$  zapomocą dwóch prętów. Jeżeli przez  $s$

oznaczymy liczbę węzłów, dołączonych do danego trójkąta, to liczba prętów łączących wyniesie  $2s$ . Ogólna liczba prętów kratownicy będzie się równała  $r = 2s + 3$ . Wstawiając we wzór ten  $s = k - 3$ , gdzie  $k$  oznacza całkowitą liczbę węzłów kratownicy, otrzymujemy:

$$r = 2k - 3 \quad (618)$$

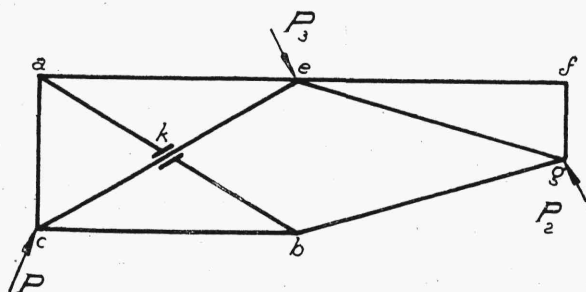


Rys. 337.

Trójkąty, stanowiące kratownice, niekoniecznie muszą być łączone w układy niezmiennie w sposób wyżej opisany. Bierzemy więc np. układ przedstawiony na rys. 338. Układ ten nie składa się, wprawdzie, wyłącznie z trójkątów, łatwo się jednak przekonać, iż jest on układem niezmiennym. Istotnie, dwa trójkąty  $aec$  i  $abc$  czynią niezmienną odległość  $e$  i  $b$ . Wobec tego węzeł  $g$  może być dołączony do układu  $eaeb$  zapomocą dwóch prętów  $eg$  i  $bg$ . Wzór (618) moc swą tu zachowuje.

W punkcie  $k$  pręty  $ce$  i  $ab$  swobodnie przechodzą przez siebie, nie tworząc węzła.

Gdybyśmy w układzie przedstawionym na rys. 338 połączyli ze sobą prętem węzły  $e$  i  $b$ , lub też w układzie przedstawionym na rys. 337 węzły



Rys. 338

$g$  i  $f$ , wówczas równanie (618) moc by swoją straciło, gdyż liczba prętów kratownicy uległaby tu powiększeniu, zaś liczba węzłów pozostałaby bez zmiany. W omówionym wypadku wyznaczenie sił, działających w prętach kratownicy, nie jest możliwe na podstawie równań statyki. Wynika to z rozumowania następującego.

Jeżeli kratownica, odpowiadająca warunkowi (618), została swobodnie podparta, lub jest łukiem trójprzegubowym, wówczas do wyznaczenia sił, działających w jej prętach, musimy znać 3 składowe reakcyj podpór. Trzy te siły wraz z liczbą  $2k - 3$  sił w prętach dają ogólną liczbę  $2k$  niewiadomych. Do wyznaczenia ich służyć nam mogą równania  $\Sigma X = 0$   $\Sigma Y = 0$ , ustawiane kolejno dla rzutów sił, działających na poszczególne węzły. Równań tego typu będziemy mieli do rozporządzenia dla całej kratownicy liczbę  $2k$ , wystarczającą do wyznaczenia tyluż niewiadomych.

Jeżeli obliczymy składowe reakcyj z równań  $\Sigma X = 0$   $\Sigma Y = 0$   $\Sigma M = 0$ , zastosowanych dla całej kratownicy, jako ciała sztywnego, wówczas ustawione w tym celu równania będą te same, co 3 z pośród  $2k$  równań równowagi węzłów.

W ten sposób, w rzeczywistości, do wyznaczenia sił w prętach będziemy rozporządzali jedynie liczbą  $2k - 3$  równań t. j. liczbą równą liczbie prętów. Geometrycznie twierdzenie to wyraża się w ten sposób, iż na planie Cremona'y ostatni wielobok sił nie daje wyników niezależnych, lecz służy jedynie do sprawdzenia wykresu (vid. str. 25).

Gdy więc liczba prętów kratownicy przekroczy liczbę  $2k - 3$ , czyli gdy

$$r > 2k - 3 \quad (619)$$

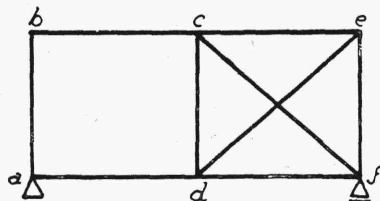
wówczas siły w prętach nie mogą być wyznaczone z warunków statyki, a kratownica jest statycznie niewyznaczalną.

Wreszcie o ile

$$r < 2k - 3 \quad (620)$$

wówczas nie wszystkie węzły kratownicy są należycie połączone i kratownica jest geometrycznie zmienną.

Równanie (618) daje warunek konieczny statycznej wyznaczalności kratownicy. Warunek ten jednak nie może być uważany za dostateczny, gdyż możemy sobie wyobrazić taki rodzaj kratownicy, która jest geometrycznie zmienną ze względu na brak jednego pręta, czyni jednak zadość równaniu (618) dlatego, że w pewnej jej części znalazł się pręt zbędny. Na rys. 339 przedstawiony jest ten właśnie wypadek kratownicy. Zmienność kratownicy tłumaczy się tu geometryczną zmiennością prostokąta  $abcd$ , w którym brakuje przekątnej  $bd$ . Prostokąt  $dcef$  posiada zbędną przekątną  $cf$ , która nie może zapobiec zmienności całej kratownicy, pozwala jednak, aby uczyniła ona zadość



Rys. 339.

równaniu (618). Ponieważ zmienność kratownicy może być w warunkach zagadnień praktycznych łatwo dostrzeżona, niedostateczność warunku (618) nie nastęrcza większych niedogodności. Istnieje zresztą metoda ścisła, pozwalająca wykazać zmienność geometryczną kratownic w sposób ścisły i ogólny<sup>1)</sup>.

## 2. Metody obliczania kratownic statycznie wyznaczalnych.

Analityczna metoda zrównoważenia węzłów polega na rozpatrywaniu każdego węzła kratownicy, jako oddzielnego, znajdującego się w stanie równowagi, punktu materialnego, i na ustawieniu dla niego dwóch równań równowagi (vid. rozdz. II, 6):

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad (621)$$

Jak było powiedziane w paragrafie poprzednim, liczba równań (621) dla całej kratownicy odpowiada liczbie niewiadomych sił w prętach. Podobny sposób obliczenia, w schemacie swym bardzo prosty, nastęrcza jednak znaczne trudności rachunkowe. Nadaje się on częściowo do wyznaczenia linii wpływowych dla bardziej złożonych kratownic.

Z równań (621) wynika między innemi, że gdy w danym węźle, bezpośrednio nieobciążonym, spotykają się dwa pręty położone na jednej prostej, trzeci zaś pręt jest do nich nachylony, to siła w tym ostatnim równa się zeru.

---

Wykreślna metoda zrównoważenia węzłów polega na zamykaniu wieloboków sił dla każdego węzła kratownicy. Połączenie wieloboków, dotyczących poszczególnych węzłów w jeden wykres daje plan Cremona'y (rozd. II, 6). Użycie sposobu Cremona'y jest najwłaściwsze, gdy chodzi o kratownice obciążone dużą liczbą sił stałych (np. kratownice dachowe lub jazowe) i gdy chodzi o wyznaczenie sił we wszystkich prętach kratownicy. Koniecznem jest tu, aby był w kratownicy jeden chociaż węzeł, w którym zbiegałyby się tylko 2 pręty.

---

<sup>1)</sup>, Vid, np. F. Jasiński „Statika sooruzenij“, 1902, oraz O. Mohr, op. cit.