

$$H = \frac{\frac{l^2 \operatorname{tg} \beta}{24 \cos \beta} - \frac{r^2 \sin \beta}{2}}{\frac{l^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{12 \cos \beta} + r^2 \cos \beta} \cdot P \quad (489)$$

gdzie  $r$  oznacza promień bezwładności przekrojów poprzecznych prętów ramy. Różnica między wartościami  $H$ , obliczonymi w obydwóch wypadkach, zależy od kąta  $\beta$  i promienia  $r$  i wynosi do 10%.

Wpływ wahań temperatury na odkształcenie ramy jest przeważnie znaczny. Wpływ ten uwzględniamy w następujący sposób. Bierzemy dla przykładu ramę przedstawioną na rys. 284. Przypuśćmy, iż największa możliwa różnica temperatury w stosunku do temperatury montażu wynosi  $t^0$  i że współczynnik wydłużenia materiału ramy przy zmianie temperatury na  $1^0$  wynosi  $\lambda$ .

Zastępujemy podporę przegubową  $C$  przez podporę przegubowo-przesuwną i obliczamy wydłużenie się ramy pod działaniem temperatury, które wyniesie  $\lambda \cdot \lambda \cdot t$ . Aby przesunięcie punktu  $C$  w rzeczywistości miejsca nie miało, musimy zaczepić w punktach  $A$  i  $C$  dwie równe i zwrócone ku sobie siły  $H$ . Obliczamy przesunięcie  $u_C$  punktu  $C$  pod działaniem siły  $H$  i ustawiamy równanie:

$$u_C - \lambda \cdot \lambda \cdot t = 0 \quad (490)$$

czyli równanie:

$$u_C = - \frac{P s^3 \cos \beta}{3 E J} \sin \beta + \frac{2 H s^3 \sin^2 \beta}{3 E J} = \lambda \cdot \lambda \cdot t$$

z którego obliczamy  $H$ .

## 10. Zastosowanie twierdzeń o trzech i o czterech momentach.

Wobec tego, że siły podłużne w prętach ram nie mają większego wpływu na przesunięcia poszczególnych węzłów, możemy uważać te ostatnie za nieprzesuwalne, o ile tylko rama jest tego typu, że przesunięcia węzłów nie mogą występować, jako skutek wyginania się prętów.

W tych wypadkach mamy możność zastosowania do obliczenia ramownic twierdzenia o trzech momentach, przy którego wyprowadzeniu (rozdz. XI,4) nigdzie nie korzystaliśmy z warunku, że poszczególne przęsła belki ciągłej położone są na jednej prostej, a nie na linii załamanej w płaszczyźnie sił.

Zastosujemy tu równanie trzech momentów do obliczenia ramownicy trapezowej, przedstawionej na rys. 274, str. 264. Równanie trzech momentów ma postać następującą (rozdz. XI, wzór 400):

$$M_A \cdot l_{AB} + 2 M_B (l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = -6 (\mathfrak{B}'_{AB} + \mathfrak{B}'_{BC}) \quad (491)$$

Przyjmujemy tu za podpory belki ciągłej węzły  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  i ustawiamy równanie trzech momentów dla węzłów  $A$ ,  $B$  i  $C$ :

$$2 M_B \cdot \left( s + b \cdot \frac{J_s}{J_b} \right) + M_C \cdot s \cdot \frac{J_s}{J_b} = -6 \mathfrak{B}_{BC} \cdot \frac{J_s}{J_b} \quad (491')$$

Wykres momentów zginających pręt  $BC$  pod działaniem dwóch równych i symetrycznie zaczepionych sił  $P$  ma kształt przedstawiony na rys. 240 w rozdz. XI, a więc:

$$\mathfrak{B}_{BC} = \frac{Pd}{2} \cdot d + \frac{Pd}{2} (e - d) = \frac{Pde}{2}$$

Wobec tego, że ze względów symetrii  $M_B = M_C$ , równanie (491) przybiera postać następującą:

$$M_B (2k + 3) = -\frac{3Pde}{b} \quad (492)$$

Zależność między momentem  $M_B$  a parciem poziomym w ramie wyraża się wzorem:

$$M_B = P \cdot a - H \cdot h \quad (492')$$

Na podstawie równań (492) i (492') otrzymujemy, że

$$H = \frac{P}{bh} \cdot \frac{3(de + ab) + 2abk}{3 + 2k}$$

t. j. otrzymujemy wzór (484), podany wyżej w § 5.

Ramy wieloprzęsłowe o węzłach nieprzesuwalnych mogą być obliczone zapomocą t.zw. równania czterech momentów. Równanie to wyprowadzamy na podstawie twierdzenia o trzech momentach w sposób następujący.

Wyobrażamy sobie, mianowicie, iż do belki ciągłej przedstawionej na rys. 213 (str. 211, rozdz. XI), został zaczepiony w przekroju nad podporą  $B$  moment zewnętrzny  $M$ . Po przecięciu belki ciągłej nad podporą  $B$ , część momentu  $M$  równa  $M'$  będzie działała na belkę swobodnie podpartą  $AB$ , druga zaś część  $M''$  na belkę swobodnie podpartą  $BC$ . Mamy więc, że

$$M = M' - M''$$

O ile pozatem na belki  $AB$  i  $BC$  bezpośrednio żadne siły zewnętrzne nie działają, to wielkości  $\mathfrak{B}$  t. j. reakcje podpór  $B$  tych belek uważanych za swobodnie podparte otrzymują w tym wypadku dla obciążenia wtórnego następujące wartości:

$$\mathfrak{B}_{AB}^M = \frac{M' \cdot l_{AB}}{3} \quad ; \quad \mathfrak{B}_{BC}^M = \frac{M \cdot l_{BC}}{3} \quad (493)$$

Wielkości  $\mathfrak{B}^M$  wpływają na zmianę kątów, wyrażonych wzorami (393) i (394) z rozdz. XI, wobec czego równanie (396) przybiera tu następującą postać:

$$\begin{aligned} M_A \cdot l_{AB} + 2 M_B (l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = \\ = - 2 (M' l_{AB} + M'' l_{BC}) - 6 (\mathfrak{B}_{AB} + \mathfrak{B}_{BC}) \end{aligned} \quad (494)$$

Powyższy wzór (494) dotyczy belki ciągłej, znajdującej się zarówno pod działaniem momentu  $M$ , jak i sił prostopadłych do osi belki.

Oznaczamy w dalszym ciągu przez  $M'_B$  moment, działający bezpośrednio na lewo od podpory  $B$ , a przez  $M''_B$  moment, działający bezpośrednio na prawo. Mamy w ten sposób, że

$$\begin{aligned} M'_B &= M_B + M' \\ M''_B &= M_B + M'' \end{aligned}$$

W związku z temi oznaczeniami równanie (494) przybiera następującą postać:

$$M_A \cdot l_{AB} + 2 M'_B \cdot l_{AB} + 2 M''_B \cdot l_{BC} + M_C \cdot l_{BC} = - 6 (\mathfrak{B}_{AB} + \mathfrak{B}_{BC}) \quad (495)$$

Jest to równanie czterech momentów <sup>1)</sup>.

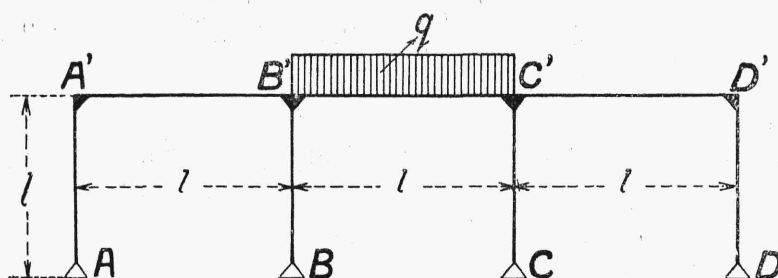
<sup>1)</sup> Por. F. Bleich, „Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes“, 1918.

O ile poszczególne przęsła belki ciągłej różnią się od siebie momentami bezwładności przekrojów poprzecznych, wówczas równanie (495) przybiera postać następującą:

$$M_{A'} \cdot l_{AB} + 2 M'_{B'} \cdot l_{AB} + 2 M''_{B'} \cdot l_{BC} + M_{C'} \cdot l_{BC} = -6 (\mathfrak{B}'_{AB} + \mathfrak{B}'_{BC}) \quad (496)$$

gdzie kreskowane litery  $l$  i  $\mathfrak{B}$  mają to samo znaczenie, co w rozdz. XI, 4.

Wyzyskujemy równanie (495) do wyznaczenia momentów zginających w węzłach ramownicy, przedstawionej na rys. 285 i obciążonej w sposób ciągły i równomierny w przęśle  $B'C'$  przy jednostkowym obciążeniu pionowym  $q$ .



Rys. 285.

W węzłach  $A'$  i  $D'$  mamy do czynienia z momentami  $M_{A'}$  i  $M_{D'}$ , które wobec symetrii ramy, są sobie równe.

W punkcie  $B'$ , bezpośrednio na lewo, działa w przęśle  $A'B'$  moment  $M_{B'}$ , zaś bezpośrednio na prawo od węzła, w przęśle  $B'C'$ , moment  $M'_{B'}$ , wreszcie bezpośrednio poniżej węzła  $B'$ , w słupie  $B'B$ , działa moment zginający  $M''_{B'}$ . Symetrycznie do momentów w węźle  $B'$ , mamy odpowiednio w węźle  $C'$  do czynienia z momentami  $M_{B'} = M_{C'}$ ,  $M'_{B'} = M'_{C'}$ ,  $M''_{B'} = M''_{C'}$ .

Stosujemy tu do węzłów  $A, A'$  i  $B'$  równanie trzech momentów, zaś do węzłów  $A', B'$  i  $B$  oraz do węzłów  $A', B', C'$  równanie czterech momentów (495), przyczem przyjmujemy, że długości wszystkich przęseł ramownicy są sobie równe i są równe jej wysokości, a moment bezwładności jest stały dla wszystkich prętów.

Mamy więc:

$$2 M_{A'} (l + l) + M_{B'} \cdot l = 0$$

$$M_{A'} \cdot l + 2 M_{B'} \cdot l + 2 M'_{B'} \cdot l + M'_{C'} \cdot l = -6 \cdot \frac{q l^2}{4} \quad (497)$$

$$M_{A'} \cdot l + 2 M_{B'} \cdot l + 2 M''_{B'} \cdot l = 0$$

Równania typu (495), łącznie z zależnościami:

$$M'_{B'} = M'_{C'} ; M_{B'} = M'_{B'} + M''_{B'}$$

doprowadzają nas do rozwiązań następujących:

$$\begin{aligned} M_{A'} &= M_{D'} = \frac{q l^2}{118} \\ M_{B'} &= M_{C'} = -\frac{2 q l^2}{59} \\ M'_{B'} &= M'_{C'} = \frac{7 q l^2}{236} \end{aligned} \quad (498)$$

Wielkości parć poziomych  $H_A = H_D$  i  $H_B = H_C$  znajdujemy tu ze wzorów:

$$M_{A'} = H_A \cdot l \text{ i } M''_{B'} = H_B \cdot l \quad (498')$$

W razie niesymetrycznego obciążenia pionowego należałoby zastosować jeszcze równanie czterech momentów do węzłów  $B'$ ,  $C'$  i  $D'$  oraz do węzłów  $B'$ ,  $C'$  i  $C$ , wreszcie równanie trzech momentów do węzłów  $C'$ ,  $D'$  i  $D$ .

O ile węzły ramownicy mogą być uważane za nieprzesuwne, to możemy wówczas zastosować do obliczenia jej i inne reguły wyprowadzone dla belek ciągłych, jak np. teorię ognisk <sup>1)</sup>, jednak zakres tego rodzaju ramownic jest dosyć ograniczony i sprowadza się prawie wyłącznie do ram prostokątnych <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Por. E. Suter „Berechnung des kontinuierlichen Balkens sowie Berechnung des mehrfachen Rahmens“, 1916.

<sup>2)</sup> Rozwiązania licznych układów ramowych, często będących w użyciu, znaleźć można w pracach A. Kleinogel'a p. t. „Rahmenformeln“ i „Mehrstielige Rahmen“, Berlin.