

gdzie M_1, M_2, M_3 oznaczają momenty zginające na poszczególnych odcinkach, przedstawione, jako funkcje x .

Po zcałkowaniu równań (234) odkształconą wyznaczymy, tak samo jak dla belki o przekroju stałym, z warunku, że w punktach C i D jej sąsiednie odcinki mają wspólne styczne i równe rzędne, oraz z warunku, że na podporach ugięcie belki równe jest 0.

Zastrzec się należy, że omówione rozwiązanie dla belki o zmiennym przekroju poprzecznym nie może być uważane za zupełnie ścisłe, gdyż równanie (210) wyprowadzone zostało dla belek o przekroju stałym; rozwiązanie to daje jednak dla celów praktycznych wyniki zadowalające.

6. Obliczenie ugięć sposobem momentów wtórnych.

Poza sposobem bezpośredniego całkowania równania odkształconej ugięcia belki mogą być obliczane jeszcze i sposobem, opartym na analogji, mającej miejsce między równaniem odkształconej (por. § 5 niniejszego rozdziału):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad (235)$$

a równaniem krzywej sznurowej (por. rozdz. II, 4):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \quad (236)$$

Stosunki znajdujące się w prawych częściach obydwóch równań mają ten sam wymiar cm^{-1} gdyż q ma wymiar $\text{k}:\text{cm}$, H wymiar k , M wymiar $\text{k}.\text{cm}$, wreszcie EJ wymiar $\text{k}.\text{cm}^2$.

Podobieństwo obydwóch równań może być wyzyskane drogą rozumowania następującego.

Jeżeli sporządzimy dla belki w pewien dowolny sposób obciążonej wielobok sznurowy, względnie krzywą sznurową, wówczas, jak wiadomo, odległości y , zawarte między tą krzywą a prostą zamykającą, pomnożone przez odległość biegunową, dadzą nam momenty zginające, czyli że w pewnym przekroju xx belki $M_x = f_1(x) = y_1 \cdot H$.

Z drugiej strony, rzędne, zawarte między odkształconą danej belki a jej zamykającą, w danym razie osią X -ów, dają ugięcia belki w poszczególnych przekrojach czyli $y = f(x)$.

Jeżeli dla danej belki przyjmiemy obciążenie ciągłe, zmieniające się według reguły $q = M = f_1(x)$, które będziemy nazywali obciążeniem wtórnym, i o ile za odległość biegunową przyjmiemy pewien odcinek ξ , wyrażający się w skali $\text{k}.\text{cm}^2 = s \text{ cm}$ liczbą EJ , wówczas krzywa sznurowa, sporządzona dla takiego obciążenia, da rzędne równe y_{II} (mierzone od zamykającej), które pomnożone przez odległość biegunową $\xi = EJ$

przedstawiać będą dla poszczególnych przekrojów belki momenty zginające M , wywołane przez obciążenie ciągłe $q = M = f_1(x)$, czyli momenty wtórne.

Będziemy więc w ten sposób mieli, że:

$$M = y'' \cdot EJ$$

Równanie otrzymanej krzywej sznurowej przybierze postać:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{EI} \quad \text{czyli} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

a więc będzie równaniem odkształconej.

Wynikać stąd będzie, że $y = y''$ czyli że, aby otrzymać ugięcie w danym punkcie belki, wystarczy moment wtórny w danym przekroju belki podzielić przez EJ :

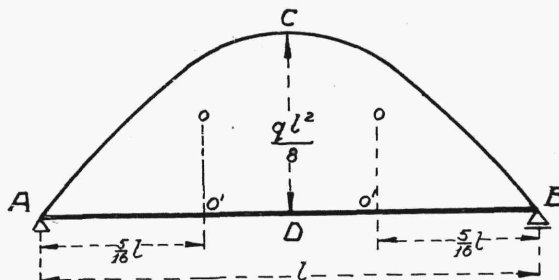
$$y = \frac{M}{EI} \quad (237)$$

Wyznaczając rzędne y dla kolejnych punktów belki i odkładając je od poziomej prostej znaleźć możemy odkształconą oś belki.

Przedstawiony sposób obliczenia ugięć był zaproponowany przez Mohra¹⁾.

Poniżej zastosujemy omówioną metodę do szeregu wypadków szczególnych, stosując zarówno sposób obliczenia analityczny, jak i wykresny.

Mamy belkę na dwóch podporach o jednostajnym obciążeniu jednostkowym q k/cm. Wykres momentów zginających ma w danym wypadku (rozd. IV, 3) kształt paraboli przedstawionej na rys. 149. Uważamy para-



Rys. 149.

bolę ACB za obciążenie wtórne belki. Wypadkowa sił, działających na belkę równa się polu $ACB = \frac{2}{3} \cdot \frac{q l^2}{8} \cdot l$, skąd reakcja każdej z podpór wynosi:

$$M = N = \frac{q l^3}{24}.$$

¹⁾ O. Mohr, „Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik“, 1914 str. 342.

Moment \mathfrak{M} od ciągłego obciążenia jednostkowego M równa się dla środka belki:

$$\mathfrak{M}_{sr} = \mathfrak{M} \frac{l}{2} - \text{pole } ACD \cdot \overline{O'D}$$

gdzie $O'D$ oznacza poziomą odległość środka belki od środka ciężkości połowy ACD pola paraboli ACB . Ponieważ odległość $AO' = \frac{5}{16} l$, więc

$$O'D = \frac{3}{16} l. \text{ Wobec tego}$$

$$\mathfrak{M}_{sr} = \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{3l}{16} = \frac{5}{384} \cdot ql^4$$

skąd dla bezwzględnej wartości ugięcia belki w środku otrzymujemy wzór następujący:

$$y_{sr} = \frac{\mathfrak{M}_{sr}}{EJ} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

co odpowiada wartości otrzymanej dla tego ugięcia drogą całkowania równania odkształconej (por. § 5 niniejszego rozdziału, wzór 217).

Kąty nachylenia względem osi X -ów stycznych do odkształconej znajdujemy sposobem momentów wtórnych, różniczkując równanie:

$$y = \frac{\mathfrak{M}}{EJ} \quad (237)$$

skąd otrzymujemy, wobec znanej zależności między momentem zginającym a siłą poprzeczną (rozdz. IV, 5), że

$$\varphi = y' = \frac{1}{EJ} = \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{\mathfrak{Z}}{EJ} \quad (238)$$

gdzie \mathfrak{Z} oznacza siłę poprzeczną, wywołaną w belce przez obciążenie wtórne $\eta = M$.

Na podporze belki przedstawionej na rys. 149 mamy np. w ten sposób (bezwzględna wartość kąta):

$$\varphi_A = \frac{ql^3}{24EJ} \quad (239)$$

Bierzemy, w dalszym ciągu, belkę AB w dwóch punktach swobodnie podpartą, do której końca B zaczepiony został moment M (rys. 150). Chodzi

o znalezienie kątów nachylenia końcowych przekrojów belki względem pionu (lub kątów nachylenia odpowiednich stycznych do odkształconej względem poziomu).

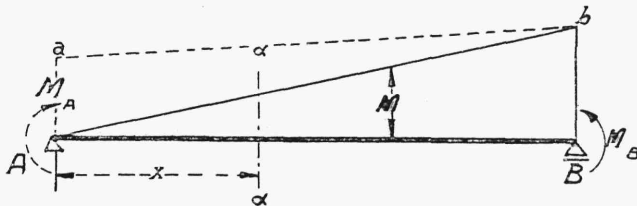
Z równania momentów względem podpory B wynika, że:

$$M = Al - M_B = 0 \quad (240)$$

skąd znajdujemy reakcję A , poczem moment zginający w dowolnym punkcie (przekrój $\alpha\alpha$) będzie się równał:

$$M = A \cdot x \quad (241)$$

Równanie (241) daje wykres momentów ABb przedstawiony w postaci trójkąta (rys. 150), który przyjmujemy na wykres obciążenia belki.



Rys. 150.

W zależności od tego obciążenia obliczamy reakcje podpór; w tym celu przyrównujemy do zera momenty sił zewnętrznych względem obydwóch podpór:

$$\frac{M_B \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l - \mathfrak{A} \cdot l = 0 \quad (242)$$

$$\frac{M_B \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{3} l - \mathfrak{A} \cdot l = 0$$

stąd otrzymujemy, że:

$$\mathfrak{A} = \frac{M_B \cdot l}{3} \quad ; \quad \mathfrak{A} = \frac{M_B \cdot l}{6} \quad (243)$$

Odpowiednie kąty obrotu będą się tu równały, co do wartości bezwzględnej, stosownie do wzoru (238):

$$\varphi_A^B = \frac{M_B \cdot l}{6 EJ} \quad \varphi_B^B = \frac{M_B \cdot l}{3 EJ} \quad (244)$$

Jeżeli do końca A belki zaczepimy moment M_A , to na podstawie obliczenia analogicznego do poprzedniego znajdziemy:

$$\varphi_A^A = \frac{M_A \cdot l}{3EJ} \quad \varphi_B^A = \frac{M_A \cdot l}{6EJ} \quad (244')$$

zaś przy jednoczesnym działaniu obydwóch momentów będziemy mieli:

$$\varphi_A = \varphi_A^A + \varphi_A^B = \frac{M_A \cdot l}{3EJ} + \frac{M_B \cdot l}{6EJ} \quad (245)$$

$$\varphi_B = \varphi_B^A + \varphi_B^B = \frac{M_A \cdot l}{6EJ} + \frac{M_B \cdot l}{3EJ}$$

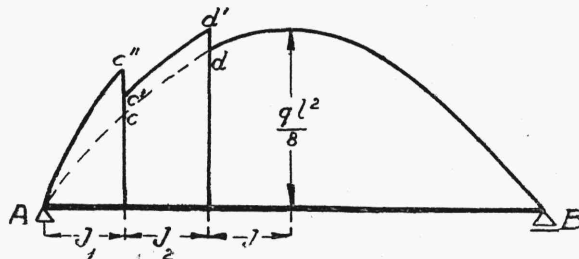
W razie, gdyby momenty M_B i M_A miały różne znaki, trzeba by we wzorze (245) przed jednym z nich umieścić znak — (mniej).

Zastosowanie sposobu momentów wtórnych do belki o J różnym dla różnych jej odcinków opiera się na wyrażeniu poszczególnych momentów bezwładności przez jeden z nich. Piszemy więc, że $J_2 = n J_1$, $J_3 = m J_1$ i nadajemy równaniom (234) z paragrafu poprzedniego postać następującą:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_1}{EJ_1}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_2}{n} \cdot \frac{1}{EJ_1}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_3}{m} \cdot \frac{1}{EJ_1} \quad (246)$$

Za wtórne obciążenie belki na poszczególnych odcinkach przyjmujemy wielkości M_1 , $\frac{M_2}{n}$ i $\frac{M_3}{m}$. Aby wyznaczyć ugięcia y postępujemy w sposób podany w innych zadaniach tego paragrafu, t. j. drogą obliczenia odpowiednich momentów wtórnych \mathfrak{M} i dzielenia ich przez EJ .

Na rys. 151 podany jest odpowiednio przekształcony wykres momentów M , czyli wykres obciążenia wtórnego belki o przekroju niestałym.



Rys. 151.

Strzałki na rysunku oznaczają części belki, na których ma miejsce dany moment bezwładności.

Sposób momentów wtórnych można wyzyskać i do bezpośredniego wykreślenia odkształconej. W tym celu dzielimy pole wykresu momentów na pionowe paski i znajdujemy pola tych pasków, uważając je za siły, działające na belkę i mające linie działania, przechodzące przez środki ciężkości pasków. Dla sił tych wykreślamy linię sznurową przy odległości biegunowej $\bar{\delta} = EJ$. Odcinki pionowe między krzywą a jej zamykającą dadzą nam poszukiwane ugięcia belki a więc i jej odkształconą.

Postępujemy tu więc zupełnie tak samo, jak to zostało opisane w rozdz. II w § 3 i § 4.

Chodzi o właściwe ustalenie skali rysunku.

Zarówno pola pasków, na które podzieliliśmy wykres momentów, jak i iloczyn EJ mają tu jeden i ten sam wymiar $k \cdot \text{cm}^2$, przyjmujemy więc dla wieloboku sił skalę: $1 k \cdot \text{cm}^2 = s \text{ cm}$.

Wobec tego, że moment zginający M_x w danym przekroju belki nie może być zależny od odległości biegunowej wieloboku sił, z którego został wyznaczony, iloczyn $M_x = y_{\text{II}} \bar{\delta}$ ma dla danej belki i danego obciążenia wielkość stałą. Wynika stąd, że skoro $\bar{\delta}$ podzielimy przez n , to $y = y_{\text{II}}$ wzrośnie n -krotnie.

Powyższe pozwala nam na otrzymanie ugięć belki y dowolnie powiększonych. Aby więc np. 100-krotnie powiększyć na rysunku ugięcia belki, przyjmujemy za odległość biegunową $\bar{\delta}$ nie EJ , lecz $0,01 EJ$.

O ile poszczególne części belki mają różne momenty bezwładności, to musimy przed wykreśleniem linii sznurowej doprowadzić wykres momentów od obciążenia rzeczywistego do stanu, przedstawionego na rys. 151, a omówionego w odcinku poprzednim niniejszego paragrafu.

Z równań (246) wynika, że przekształcenie wykresu momentów może być w tym wypadku zastąpione przez stosowanie dla różnych odcinków belki różnych wielkości $\bar{\delta}$, co jednak bardziej naraża na błędy w obliczeniu, niż sposób omówiony wyżej.

7. Wpływ sił poprzecznych na wyginanie się belek.

Siły poprzeczne, wywołując przesuwanie się względem siebie przekrojów poprzecznych belki oraz jej warstw poziomych (rys. 132 c i 132 d), wywierają przez to wpływ na jej ostateczne wygięcie.

Wyobraźmy sobie, że odkształcona oś belki, pod działaniem zarówno momentów zginających, jako też i sił poprzecznych, przybiera postać, od