

na płaszczyzny do siebie prostopadłe, są sobie równe, co do wartości bezwzględnej, więc $BC = B'C'$. Łącząc punkty B i B' ze sobą, znajdujemy punkt D przecięcia się prostej BB' z prostą OF . Punkt ten jest środkiem koła Mohr'a. Wykreśliwszy to koło, otrzymujemy z wykresu, że

$$\sigma_{\max} = OF \quad \text{i} \quad \sigma_{\min} = OA.$$

4. Wykresy naprężeń w belkach.

Wzory poprzednich paragrafów znajdują między innymi zastosowanie przy obliczaniu belek zginanych. W obliczeniach tego rodzaju zachodzi, mianowicie, niekiedy potrzeba sprawdzenia, czy naprężenia główne i największe naprężenia styczne w pewnych, specjalnie niebezpiecznych punktach, nie przekraczają naprężeń dopuszczalnych.

Weźmy np. belkę (rys. 159) utwierdzoną w jednym końcu a w drugim swobodną, obciążoną w sposób ciągły i równomierny. Jeżeli chodzi o wyznaczenie naprężeń głównych w pewnym punkcie belki, wówczas stosujemy tu wzór (265).

Wzór ten nieco upraszcza się w danym wypadku, gdyż naprężenie normalne równoległe do osi OY równa się tu zeru ($\sigma_y = 0$) w myśl założenia, dotyczącego naprężeń miejscowych (por. rozdz. I, 5). Otrzymujemy w ten sposób wzory:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_0^2 + \sigma_x^2} \quad (280)$$

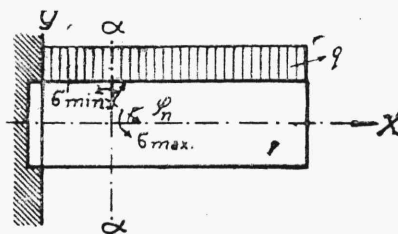
$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_0^2 + \sigma_x^2}$$

które nazywamy nieraz wzorami dla naprężeń ukośnych w belkach zginanych i które stosujemy do belek dowolnie podpartych.

W tych samych warunkach dla największego naprężenia stycznego otrzymujemy:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_0^2 + \sigma_x^2} \quad (281)$$

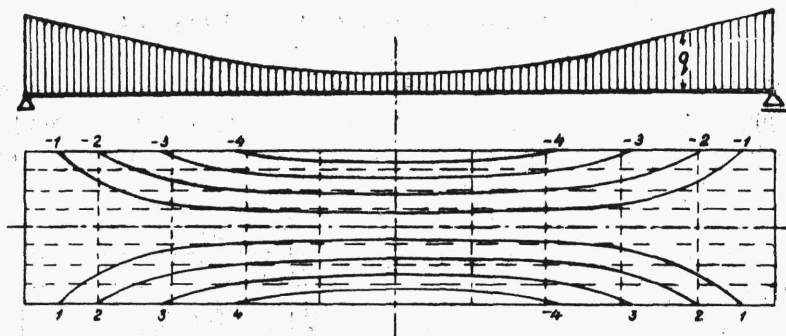
Dla należytego zobrazowania rozkładu wszelkiego rodzaju naprężeń w różnych punktach belki uciekamy się do tak zwanych linii jednakowych naprężeń i linii izostatycznych.



Rys. 159.

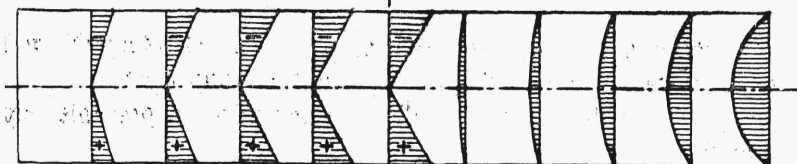
Weźmy np. belkę na dwóch podporach o przekroju prostokątnym, obciążeniu ciągłym, przedstawionem na rys. 160.

Sporządzamy w poszczególnych przekrojach poprzecznych belki wykresy naprężeń normalnych, równoległych do osi belki, i odpowiednich naprężeń stycznych (rys. 161, por. rozdz. VII, 1 i 4).



Rys. 160.

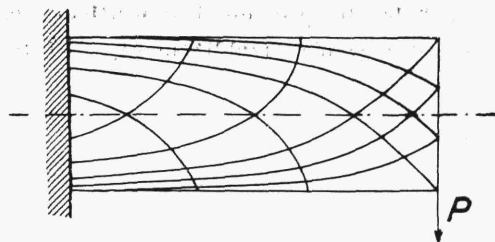
Przypuśćmy, że sporządziliśmy wszystkie wspomniane wykresy naprężeń w tej samej skali i że chcemy znaleźć punkty belki, w których naprężenia normalne przybierają pewną wartość σ_0 . Odkładamy więc naprężenie σ_0 w danej skali kolejno na wszystkich wykresach (rys. 161) i w ten sposób znajdujemy w różnych odległościach od osi obojętnej punkty, w których naprężenia otrzymują wartość σ_0 , poczem punkty te łączymy ze sobą. To samo robimy i dla innych wartości σ , otrzymując w ten sposób tak zwane linie jednakowych naprężeń (rys. 160).



Rys. 161.

Aby znaleźć krzywe jednakowych naprężeń τ_{\max} oraz σ_{\max} i σ_{\min} , musimy wyznaczyć te naprężenia ze wzorów (280) i (281) dla poszczególnych punktów belki, następnie zaś równe z nich połączyć krzywami.

Punkty jednakowych naprężeń możemy znaleźć również i rachunkowo. Przeważnie robimy to w ten sposób, że pokrywamy belkę w rzucie pionowym siatką linii pionowych i poziomych i obliczamy naprężenia dla wszystkich węzłów siatki (rys. 160), poczem interpolujemy linjowo.



Rys. 162.

Aby poznać warunki pracy danej budowli, nieraz zachodzi potrzeba wykreślenia krzywych, posiadających tę własność, że styczna w danym punkcie do danej krzywej wskazuje kierunek naprężenia głównego. Są to, tak zwane, tory naprężeń albo linje izostatyczne. Wskazują one kierunki ewentualnych pęknięć.

Aby te linje otrzymać, określamy dla szeregu punktów proste, nachylone względem osi belki pod kątem, wyznaczonym z równania (263). Na podstawie tak otrzymanych prostych przeprowadzamy poszukiwane linje krzywe.

Linje izostatyczne (tory naprężeń) przedstawione są na rys. 162 dla belki w jednym końcu utwierdzonej, a na drugim obciążonej siłą P . Dwa układy krzywych, uwidocznione na rysunku, odpowiadają naprężeniom σ_{\max} i σ_{\min} , wobec czego przecinają się one pod kątem prostym.

Teoretycznie ściśle moglibyśmy otrzymać tory naprężeń drogą następującego rozważania.

Niech będzie równanie $y = f(x)$ poszukiwanem równaniem linii izostatycznej. Pochodna $\frac{dy}{dx}$ wyrazi wówczas tangens kąta φ_n nachylenia względem osi X -ów stycznej do tej krzywej, czyli kąta nachylenia przekroju głównego w danym punkcie.

Z drugiej strony, wiemy, że kąt φ_n wyznacza się z równania (263), które dla belek przybiera kształt:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_n = - \frac{2\tau_o}{\sigma_x}$$

gdzie naprężenie τ_o zmienia się proporcjonalnie do siły poprzecznej w belce, a naprężenie σ_x proporcjonalnie do momentu zginającego.

Ponieważ

$$\operatorname{tg} 2\varphi_n = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi_n}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_n}$$

i ponieważ $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{dy}{dx}$, więc dochodzimy do równania:

$$-\frac{2\tau_o}{\sigma_x} = \frac{2\frac{dy}{dx}}{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (282)$$

Po zcałkowaniu tego równania powinniśmy znaleźć równanie linii $y = f(x)$, całkowanie to jednak dla belek naogół nie jest możliwe, wobec czego uciekać tu się musimy do rozwiązania przybliżonego, o którym mowa była wyżej.
