

podporze a . Ponieważ dla wszystkich przekrojów belki AB na odcinku ab siła poprzeczna musi zachować jedną i tę samą wartość, więc wykres sił poprzecznych na tym odcinku przybiera kształt prostej nn' równoległej do osi poziomej. Proste nn' i mm' będą się przecinały w punkcie s , odpowiadającym środkowi przedziału ab . W podobny sposób, wskutek działania belki dodatkowej bc , rzędna wykresu, odpowiadająca podporze b , zmniejszy się o $\frac{q \lambda}{2}$ i pozostanie bez zmiany na całej długości przedziału bc . W ten sam sposób rozumujemy i w stosunku do innych węzłów belki.

Reguła sporządzenia wykresu sił poprzecznych przy obciążeniu ciągłym i węzłowym na podstawie wykresu dla sił poprzecznych przy obciążeniu bezpośrednim, polega więc na tym, iż środki poszczególnych przedziałów rzutujemy na ten ostatni wykres i przez otrzymane tą drogą punkty s przeprowadzamy proste poziome do przecięcia się z prostymi pionowymi, przechodzącymi przez odpowiednie węzły.

5. Zależność między momentem zginającym a siłą poprzeczną w danym przekroju belki.

W paragrafie 2 niniejszego rozdziału została umotywowana następująca zależność między momentem zginającym w danym przekroju belki a siłą poprzeczną w tym przekroju (wzór 69):

$$k = \frac{M}{T}$$

gdzie k oznacza odległość punktu zaczepienia siły T od danego przekroju belki.

Ustalamy obecnie drugą zależność między temi samemi wielkościami.

W tym celu bierzemy belkę przedstawioną na rys. 75 i wypisujemy wzory dla momentów M_i oraz M_{i-1} , odpowiadających przekrojom belki pod siłami P_i i P_{i-1} :

$$M_i = A \cdot a_i - \sum_1^{i-1} P \cdot a \quad (78)$$

$$M_{i-1} = A \cdot a_{i-1} - \sum_1^{i-2} P (a - \lambda) \quad (79)$$

Odejmujemy od siebie wzory (78) i (79):

$$M_i - M_{i-1} = A (a_i - a_{i-1}) - \lambda \sum_1^{i-1} P \quad (80)$$

Ponieważ $x_i - x_{i-1}$ jest to długość przedziału λ , a siła poprzeczna

$$T_i = A_i - \sum_1^{i-1} P \quad (81)$$

mamy więc, że

$$T_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{\lambda}$$

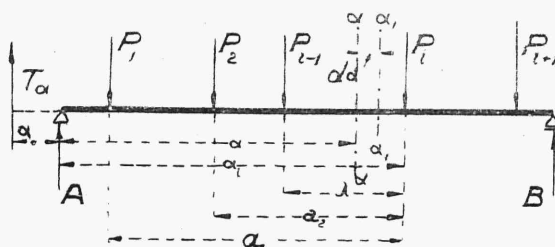
lub też, że

$$M_i = M_{i-1} + T_i \cdot \lambda \quad (82)$$

W razie obciążenia ciągłego możemy zastąpić różnicę $M_i - M_{i-1}$ przez przyrost ΔM , a długość przedziału λ przez przyrost Δx . Otrzymamy wówczas, że

$$T = \lim \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx} \quad (83)$$

Wzór ten dotyczy również belki obciążonej siłami skupionymi między każdymi dwiema z nich. Niech więc będą $\alpha\alpha$ i $\alpha_1\alpha_1$ dwa nieskończenie bliskie



Rys. 75.

do siebie przekroje belki AB (rys. 75) między dwiema siłami P_i i P_{i-1} . Oznaczamy przez α_0 odległość od podpory A punktu zaczepienia wypadkowej sił, działających na belkę na lewo od przekrojów $\alpha\alpha$ lub $\alpha_1\alpha_1$, t.j. siły poprzecznej T_α w danym przekroju.

Moment w przekroju $\alpha\alpha$ równa się na podstawie wzoru (69):

$$M_\alpha = T_\alpha (\alpha_0 + \alpha) \quad (84)$$

a moment w przekroju $\alpha_1\alpha_1$:

$$M_{\alpha_1} = T (\alpha_0 + \alpha + dx) \quad (84')$$

Odejmując od siebie równania (84) i (84') otrzymujemy:

$$M_{\alpha_1} - M_{\alpha} = T d\alpha$$

a wobec tego, że $M_{\alpha_1} - M_{\alpha} = dM$, mamy:

$$\frac{dM}{d\alpha} = T \quad (85)$$

O ile moment zginający jest przedstawiony, jako funkcja odległości z danego przekroju od podpory, możemy łatwo wyznaczyć miejsce największego momentu z warunku maximum, czyli z równania:

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0 \quad (86)$$

W związku z równaniem (85) równanie (86) przybiera postać: $T = 0$ czyli, że wyznaczenie punktu największego momentu zginającego sprowadza się do ustalenia punktu, w którym siła poprzeczna równa się zeru.

Aby znaleźć punkt, w którym ma miejsce $\max M$, przy dowolnem obciążeniu belki siłami pionowymi, robimy wykres sił poprzecznych i znalazłszy na nim punkt, dla którego $T = 0$, twierdzimy, na zasadzie wyżej powiedzianego, iż ten punkt belki odpowiada $\max M$.

Rachunkowo robimy to samo na podstawie równania (86), przedstawiając uprzednio M , jako funkcję α .

Za przykład może tu służyć przedewszystkiem belka obciążona równomiernie w sposób ciągły. W tym celu różniczkujemy wzór:

$$M_{\alpha} = \frac{q \alpha}{2} (l - \alpha)$$

i otrzymujemy, że

$$\frac{dM}{d\alpha} = q \left(\frac{l}{2} - \alpha \right) = T \quad (87)$$

Z równania

$$\frac{dM}{d\alpha} = T = 0$$

wynika, że $\max M$ ma miejsce w środku belki.

O ile na belkę działa obciążenie ciągłe, naogół zmienne, wówczas na jej odcinek nieskończenie mały dx , zawarty między dwoma nieskończenie bliskimi przekrojami poprzecznymi belki $\alpha\alpha$ i $\alpha_1\alpha_1$, przypadnie obciążenie $q dx$, gdzie q oznacza obciążenie jednostkowe. Obciążenie $q dx$ musi być równe przyrostowi, jakiego dozna siła poprzeczna w belce T przy przejściu od przekroju $\alpha\alpha$ do nieskończenie bliskiego przekroju $\alpha_1\alpha_1$, czyli przyrostowi dT . Dochodzimy w ten sposób do równania:

$$dT = q dx$$

z którego wynika, że

$$\frac{dT}{dx} = q \quad (88)$$

czyli że dla danego przekroju belki pierwsza pochodna siły poprzecznej względem odległości przekroju od lewej podpory równa się obciążeniu jednostkowemu w tym przekroju.

Wobec zależności (83), jaka istnieje między momentem zginającym belki w danym przekroju a odpowiednią siłą poprzeczną, możemy również napisać, że

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad (88')$$

Stosujemy wzór (88) do belki, obciążonej w sposób ciągły i równomierny; różniczkujemy, mianowicie, wzór (87) dla siły poprzecznej T mającej miejsce w tym wypadku i dochodzimy do wzoru

$$\frac{dT}{dx} = q$$

gdzie q jest wielkością stałą.

Powyższe wzory (85) i (88) mogą być naogół stosowane i w tych wypadkach, gdy do belki zaczepione są również i momenty zewnętrzne, pamiętać jednak należy, że funkcja M nie zawsze ma maximum (np. nie ma go w razie obciążenia belki samym tylko momentem, zaczepionym do jednego końca belki) i dlatego równanie (85) nie zawsze może być wyzyskane.