

trójkąta na trapezy $mm'n'n$ o wysokości dy . Ponieważ pole każdego z małych trapezów równa się:

$$dA = \frac{a \cdot (h - y)}{h} dy$$

więc dla momentu bezwładności otrzymujemy wzór:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h \frac{a \cdot (h - y)}{h} y^2 dy = \frac{a \cdot h^3}{12} \quad (28)$$

Momenty bezwładności pól mają zawsze wymiar cm^4 .

3. Biegunowe momenty bezwładności i momenty odśrodkowe.

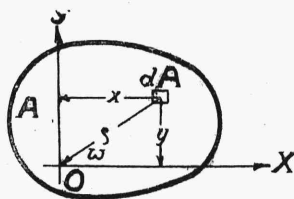
Przy obliczaniu momentów bezwładności pól natrafiamy na pewne całki określone, dla których uтары się pewne nazwy.

O ile weźmiemy figurę płaską o polu A , odniesioną do osi OX i OY i oznaczymy przez dA nieskończenie małą cząstkę umówionego pola (rys. 50), wówczas całkę określoną

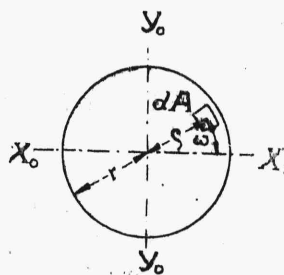
$$J_o = \int_A \rho^2 dA \quad (29)$$

gdzie ρ jest to odległość środka ciężkości pola dA od punktu O , nazywamy biegunowym momentem bezwładności danego pola względem punktu O .

Dla przykładu, obliczamy poniżej biegunowy moment bezwładności pola koła względem jego środka (rys. 51).



Rys. 50



Rys. 51.

Oznaczamy przez ω kąt, jaki tworzy promień ρ z osią $X_o X_o$, i rozwiązujemy zadanie we współrzędnych biegunowych.

Mamy więc, że $dA = \rho d\omega d\rho$, skąd

$$J_0 = \int \rho^2 dA = \int \int \rho^2 \cdot \rho d\omega d\rho = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2} \quad (30)$$

Ponieważ momenty bezwładności pewnego dowolnego pola A względem osi środkowych $X_0 X_0$ i $Y_0 Y_0$ równe są odpowiednio:

$$J_x^0 = \int_A y^2 dA \quad \text{ i } \quad J_y^0 = \int_A x^2 dA$$

i ponieważ $\rho^2 = x^2 + y^2$, więc możemy ustalić następującą zależność, dotyczącą wszelkich figur geometrycznych:

$$J_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = J_x^0 + J_y^0 \quad (31)$$

W szczególności dla koła, wobec jego symetrii względem każdej z osi środkowych, momenty bezwładności względem wszystkich tych osi muszą być sobie równe, czyli, że

$$J_x^0 = J_y^0$$

stąd wynika, że:

$$J_x^0 = J_y^0 = \frac{J_0}{2} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \quad (32)$$

O ile x i y są to współrzędne środka ciężkości pola dA (rys. 50), wówczas całkę

$$J_{xy} = \int_A xy dA \quad (33)$$

nazywamy momentem odśrodkowym danego pola względem osi OX i OY .

Jeżeli będziemy przedstawiony na rys. 50 układ osi współrzędnych obracać dookoła punktu O , wówczas wartość momentu odśrodkowego będzie się odpowiednio zmieniała. Osie współrzędnych, przy których $J_{xy} = 0$, nazywamy osiami głównymi. O ile prócz tego punkt O pokrywa się ze środkiem ciężkości danego pola, wówczas mamy do czynienia z tak zwanym układem głównych środkowych osi współrzędnych (inaczej centralnych).

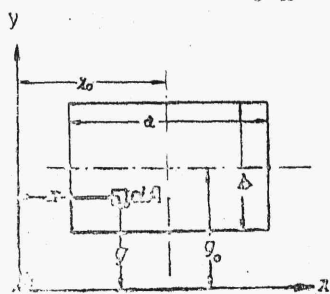
Ogólny sposób obliczania momentów odśrodkowych polega na tem, że dane pole dzielimy prostymi równoległymi do osi współrzędnych na małe prostokąty o polu ΔA , poczem wykonywamy sumowanie:

$$J_{xy} = \sum x y \Delta A \quad (34)$$

Dla przykładu podajemy poniżej obliczenie momentu odśrodkowego prostokąta przedstawionego na rys. 52. Całka (33) przybiera tu postać następującą:

$$J_{xy} = \int_A x y dA = \int_A \int_A x y dx dy = \int_{x_0 - \frac{a}{2}}^{x_0 + \frac{a}{2}} x dx \int_{y_0 - \frac{b}{2}}^{y_0 + \frac{b}{2}} y dy =$$

$$= x_0 y_0 a b = x_0 y_0 A.$$



Rys. 52.

Zarówno biegunowe momenty bezwładności, jak i momenty odśrodkowe, mają ten sam wymiar, co momenty bezwładności, czyli wymiar cm^4 .

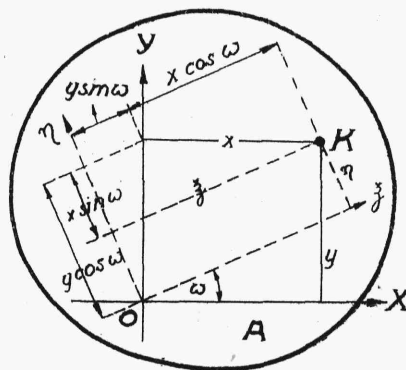
4. Zależność między momentami bezwładności obliczonymi względem osi do siebie nachylonych.

Mamy dla pewnego pola A (rys. 53) obliczone momenty bezwładności i moment odśrodkowy względem osi prostokątnych OX i OY (nie konieczne środkowych i głównych).

Są to odpowiednio:

$$J_x = \int_A y^2 dA \quad J_y = \int_A x^2 dA$$

$$J_{xy} = \int_A x y dA$$



Rys. 53.

Chodzi o wyznaczenie momentu bezwładności danego pola względem osi $O\xi$, przechodzącej przez punkt O i nachylonej względem osi OX