

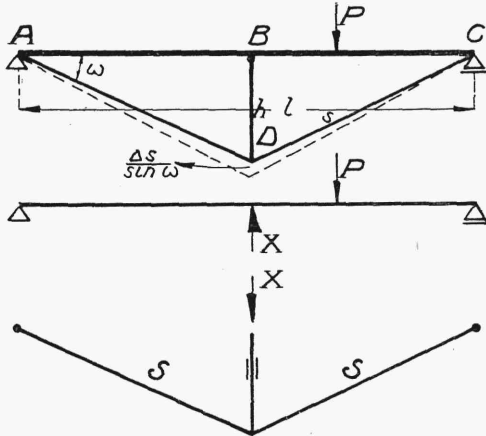
## 2. Belki wzmocnione.

Belką wzmocnioną nazywamy belkę przedstawioną na rys. 384, której ugięcie zmniejsza się za pomocą ścięgien  $AD$ ,  $CD$  oraz słupa  $BD$ , zwiększających jej sztywność. W punkcie  $B$  belka rozcięta nie jest, jednak słup  $DB$  jest z belką połączony przegubowo.

Ze względu na istnienie w punktach  $A, C, D$  przegubów i ze względów na symetrię układu możemy napisać, że

$$S = \frac{X}{2 \sin \omega} \quad (675)$$

gdzie  $X$  oznacza siłę działającą w słupie a  $S$  siły w ścięgnach. Zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia jednej wielkości statycznie niewyznaczalnej, mianowicie, siły  $X$ . Przy jej wyznaczeniu opieramy się na dwóch następujących założeniach:



Rys. 384, 385 i 386.

wzajemne oddziaływanie na siebie obydwóch części konstrukcji przez siłę  $X$ , która działa ku górze na belkę  $AC$  (rys. 385) i ku dołowi na słup  $BD$  (rys. 386). Jeżeli  $y$  jest to ugięcie belki  $AC$  pod działaniem obciążenia zewnętrznego  $P$  i siły  $X$ , a  $v$  pionowe przesunięcie końca  $B$  słupa  $BD$ , wówczas musi mieć miejsce zależność:

$$y_B = v \quad (676)$$

gdyż w rzeczywistości przegub  $B$  nie przestaje łączyć belki ze słupem.

1° Pole przekroju poprzecznego belki jest tak duże w porównaniu z polami przekrojów ścięgien, że bez większego błędu możemy w obliczeniu pominąć zmniejszenie się długości belki  $AC$  pod wpływem poziomych składowych sił  $S$ .

2° Przeguby  $A, B, C$  leżą na osi belki  $AC$ , wobec czego poziome składowe sił  $S$  nie wywołują w belce ściskania miśroodowego.

Wyobrażamy sobie, iż połączenie belki  $AC$  ze słupem  $BD$  zostało przerwane, i zastępujemy

Dla  $y_B$  (w środku belki) możemy ustawić wzór następujący:

$$y_B = y_1 - \frac{X \cdot l^3}{48 EJ} \quad (677)$$

gdzie  $y_1$  jest to ugięcie w środku belki swobodnie podpartej  $AC$  pod działaniem sił zewnętrznych; np., dla obciążenia równomiernego

$$y_1 = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EJ}$$

Z drugiej strony,

$$v = \Delta h + \frac{\Delta s}{\sin \omega} = \frac{h X}{EA_1} + \frac{s \cdot S}{EA_2 \sin \omega} \quad (678)$$

gdzie  $\Delta h$  oznacza skrócenie się słupa  $BD$ ,  $\Delta s$  wydłużenie się ścięgien,  $A_1$  i  $A_2$  odpowiednie pola przekrojów poprzecznych. Równanie (676) przyjmuje w związku ze wzorami (677) i (678) postać następującą:

$$y_1 - \frac{X l^3}{48 EJ} = \frac{h X}{EA_1} + \frac{s \cdot S}{EA_2 \sin^2 \omega} \quad (679)$$

lub też postać:

$$y_1 - \frac{X l^3}{48 EJ} = \frac{h X}{EA_1} + \frac{s \cdot X}{2 EA_2 \sin^2 \omega} \quad (680)$$

skąd otrzymujemy wzór dla  $X$ :

$$X = \frac{y_1}{\frac{l^3}{48 EJ} + \frac{h}{EA_1} + \frac{s}{2 EA_2 \sin^2 \omega}} \quad (681)$$

Znając siłę  $X$ , obliczamy moment zginający dla belki  $AC$  w punkcie oddalonym o  $x$  od podpory  $A$  ze wzoru:

$$M_x = M_x^P - \frac{1}{2} X x \quad (682)$$

Siła ściskająca belkę  $AC$  równa się

$$H = \frac{1}{2} X \cot \omega \quad (683)$$

Największe naprężenia normalne w belce otrzymujemy według wzoru:

$$\sigma = \frac{H}{A \cdot z} + \frac{M_x}{W} \leq R$$

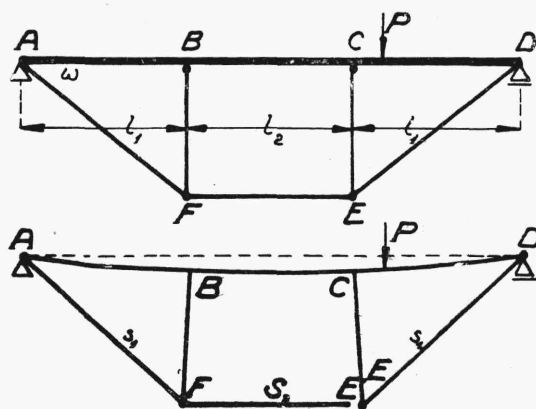
gdzie  $z$  jest to współczynnik zmniejszający (na wyboczenie) a  $R$  dopuszczalne naprężenie na zwykłe ściskanie.

O ile chcemy uwzględnić wpływ skrócenia się belki  $AC$  pod działaniem sił zewnętrznych, to musimy rozpatrywać całość belki wzmocnionej  $ABCD$ , jako kratownicę, której obciążenie, zaczepione w węźle  $B$  wynosi  $X$ . Otrzymana tą drogą wielkość  $v$  będzie się różniła od poprzednio obliczonej, różnica będzie tu jednak niewielka, gdyż skrócenie się belki w porównaniu do wydłużenia ścięgien jest zwykle nieznaczące. Dalsze obliczenie nie różni się niczem od obliczenia powyższego.

We wzorze (681) dwa ostatnie składniki w mianowniku są zwykle małe w porównaniu do pierwszego, wobec czego, pomijając je, otrzymujemy wzór następujący:

$$y_1 = \frac{X l^3}{48 EJ} \quad (684)$$

skąd na podstawie równania (677) dochodzimy do wniosku, iż ugięcie belki w punkcie  $B$  równe jest zeru, czyli że w tym wypadku ścięgna znośzą ugięcie belki w jej środku.



Rys. 387 i 388.

Na rys. 387 przedstawiona jest belka wzmocniona trójpředziałowa. Siły w obydwóch słupach  $BF$  i  $CE$ , z jednej strony, oraz w ścięgnach  $AF$

i  $ED$ , z drugiej strony, muszą tu być równe sobie, gdyż wynika to z symetrii układu i równowagi węzłów przegubowych  $F$  i  $E$ . Oznaczamy przez  $X$  siły w słupach; wówczas siły w ściągniach  $AF$  i  $ED$  równają się:

$$S_1 = \frac{X}{\sin \omega} \quad (685)$$

zaś siła w ściągnięciu  $FE$ :

$$S_2 = \frac{X}{\operatorname{tg} \omega} \quad (686)$$

Rozcinamy ściągnięto  $FE$  w przegubie  $E$ , poczem belka  $AD$  będzie się mogła wyginać swobodnie, jak belka niewzmocniona (rys. 388). Zaczepiamy w końcu  $FE'$  rozciętego ściągnięcia siłę  $S_2$  oraz takąż siłę w węźle  $E$ . Obie siły  $S_2$  działają wzdłuż jednej prostej przy zwrotach odmiennych. Zadanie sprowadza się obecnie do obliczenia odległości  $E'E$  między końcem ściągnięcia  $FE'$  a węzłem  $E$ . Niewiadome siły w słupach otrzymamy tu z warunku, że  $E'E = 0$ , co wynika z konstrukcji belki wzmocnionej.

W zależności od obciążenia zewnętrznego belki  $AD$  wyznaczamy kąty  $\varphi'_B$  i  $\varphi'_C$  obrotów jej przekrojów poprzecznych w  $B$  i  $C$ .

Oprócz obciążenia zewnętrznego, ugięcie belki wywołują jeszcze siły  $X$ , zaczepione symetrycznie i działające w kierunku od dołu ku górze. Moment zginający, wywołany przez te siły, równa się dla części  $AB$  i  $BC$  belki odpowiednio:

$$M_x = X \cdot x \quad M_x = X \cdot l_1 \quad (687)$$

skąd ogólne równanie zginania przybiera dla  $BC$  postać następującą (odcięte  $x_1$  są tu liczone od  $B$ ):

$$EJ \frac{d^2 y}{dx_1^2} = X \cdot l_1$$

Całkując, otrzymujemy:

$$EJ \frac{dy}{dx_1} = X l_1 x_1 + C_1$$

gdzie  $C_1$  wyznaczamy z równania:

$$\frac{X l_1 l_2}{2} + C_1 = 0$$

które wyraża, że kąt obrotu belki w środku jej przedziału  $BC$  równa się zeru.

W rezultacie kąt  $\varphi''_B$  obrotu przekroju  $B$  pod działaniem sił  $X$  równa się (przy  $x_1 = 0$  i osi  $Y$ -ów skierowanej ku dołowi)

$$\varphi''_B = -\frac{X l_1 l_2}{2 E J}$$

Ostatecznie, całkowite kąty obrotów przekrojów  $B$  i  $C$  wynoszą:

$$\varphi_B = \varphi'_B - \frac{X l_1 l_2}{2 E J} \quad (688)$$

$$\varphi_C = \varphi'_C - \frac{X l_1 l_2}{2 E J} \quad (689)$$

Poziome przesunięcia węzłów  $F$  i  $E$  wywołane wyginaniem się belki  $AD$  wynoszą odpowiednio ( $h$  oznacza tu wysokość słupów):

$$u_F^P = h \varphi_B \quad u_E^P = h \cdot \varphi_C \quad (690)$$

Poziome przesunięcia tych samych węzłów wywołane wydłużeniem ścięgna  $AF$  i  $DE$  oraz skróceniem słupów  $BF$  i  $CE$  otrzymujemy z następującego wzoru, podanego w rozdziale XIV i zastosowanego do trójkąta  $ABF$  (str. 391):

$$u_F^C = \sum Z \Delta l_i \quad (691)$$

W danym razie w trójkącie  $ABF$  bok  $AB$  uważamy za niepodlegający wydłużeniu lub skróceniu się. Siły  $Z$ , wywołane w ścięgnie  $AF$  i słupie  $BF$  siłą 1 zaczepioną poziomo w węźle  $F$ , równe są odpowiednio:

$$Z_1 = \frac{1}{\cos \omega} \quad Z_3 = -1 \cdot \operatorname{tg} \omega \quad (692)$$

Wydłużenia  $\Delta l_i$  w związku z tem wynoszą:

$$\Delta s = \frac{S_1 \cdot s}{E A_1} \quad \Delta h = -\frac{X h}{E A_3} \quad (693)$$

Mamy więc, że

$$u_F^C = \sum Z \Delta l = \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{S_1 \cdot s}{E A_1} + \frac{X h}{E A_3} \cdot \operatorname{tg} \omega \quad (694)$$

lub, wobec

$$S_1 = \frac{X}{\sin \omega} \quad s = \frac{l_1}{\cos \omega} \quad h = l_1 \operatorname{tg} \omega$$

że

$$u_F^C = u_E^C = \frac{X l_1}{E} \left( \frac{1}{A_1 \sin \omega \cdot \cos^2 \omega} + \frac{\operatorname{tg}^2 \omega}{A_3} \right) \quad (695)$$

Całkowite przesunięcie końca ścięgna  $E'$  wynosi

$$u_{E'} = \varphi_B \cdot h - u_F^C - \frac{S_2 l_2}{EA_2} \quad (696)$$

zaś całkowite przesunięcie węzła  $E$ :

$$u_E = \varphi_C h - u_E^C \quad (697)$$

Odległość  $E'E$  musi równać się sumie przesunięć  $\Delta_{E'}$  oraz  $\Delta_E$ . Stąd dochodzimy do równania:

$$u_{E'} + u_E = 0 \quad (698)$$

z którego wyznaczamy siłę  $X$ .

Dalsze obliczenie ma ten sam przebieg, co w belce dwuprzędziłowej.

Dla przykładu bierzemy belkę obciążoną równomiernie, dla której

$l_1 = l_2 = h = \frac{l}{3}$ , a  $\omega = 45^\circ$ . Aby znaleźć kąt  $\varphi'_B$  całkujemy równanie:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{qx}{2} (l - x)$$

Otrzymujemy dla osi  $Y$ -ów skierowanej ku górze:

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 \quad (699)$$

Ponieważ przy  $x = \frac{l}{2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ , mamy więc, że:

$$C_1 = -\frac{ql^3}{16} + \frac{ql^3}{48} = -\frac{ql^3}{24}$$

Dla  $x = \frac{l}{3}$  równanie (699) daje wartość kąta  $\varphi'_B$ :

$$\varphi'_B = \varphi'_C = \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{9} - \frac{q}{6} \cdot \frac{l^3}{27} - \frac{ql^3}{24} \right) = -0,02 ql^3 \quad (700)$$

Kąty  $\varphi_B$  i  $\varphi_C$  oraz przesunięcia  $u_F^C$  i  $u_E^C$  otrzymujemy odpowiednio ze wzorów (688) i (695), zakładając, że  $l_1 = \frac{l}{3}$  i  $A_1 = A_2 = A_3 = A$ :

$$\varphi_B = \varphi_C = \frac{0,02 ql^3}{EJ} - \frac{Xl^2}{18 EJ} \quad (701)$$

$$u_F^C = u_E^C = 1,28 \frac{Xl}{EA} \quad (702)$$

Wobec symetrii układu i jego obciążenia, dla wyznaczenia  $X$  wychodzimy z warunku, że środek ścięgna  $FE$  nie ulega poziomemu przesunięciu przy odkształceniu belki.

Warunek ten daje nam równanie następujące:

$$\begin{aligned} & \varphi_B \cdot \frac{l}{3} - u_F^C - \frac{1}{2} \Delta l_2 = \\ & = \frac{0,0067 ql^4}{EJ} - \frac{0,0185 Xl^3}{EJ} - 1,28 \frac{Xl}{EA} - \frac{0,5Xl}{3 EA} = 0 \end{aligned} \quad (703)$$

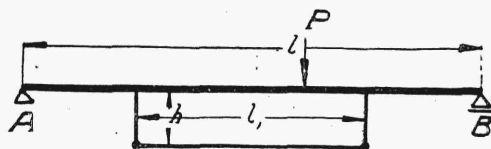
skąd otrzymujemy wzór dla  $X$ :

$$X = \frac{0,0067 ql^3}{1,450 \cdot \frac{J}{A} + 0,0185 l^2} \quad (704)$$

Za szczególny wypadek ostatnio omówionej belki może być uważana belka, przedstawiona na rys. 389, w której poziome ścięgno  $FE$  jest przymocowane do belki za pomocą słupków utwierdzonych w tej ostatniej bezprzegubowo i bez ścięgien  $AF$  i  $ED$ . O ile słupki są na tyle krótkie, że można pominąć ich wyginanie się, wówczas zakładamy w poprzednim zadaniu  $\varphi_B'' = 0$  oraz  $X = 0$ , wobec czego równanie (703) przybierze postać następującą:

$$u_E = \varphi_B \cdot h = \frac{Xl_1}{2 EA} \quad (705)$$

gdzie  $X$  oznacza siłę w ścięgnię a  $l_1$  jego długość.



Rys 389.