

$$\sum P' v_{ii} - \sum \frac{S' S'' l}{EA} = 0 \quad (754)$$

$$\sum P'' v_i - \sum \frac{S' S''' l}{EA} = 0 \quad (755)$$

Z porównania wzorów (754) i (755) wynika, że

$$\sum P' v_{ii} = \sum P'' v_i \quad (756)$$

co było do dowiedzenia.

Wprowadziwszy tu oznaczenia;

$$L_{12} = \sum P' v_{ii}, \quad L_{21} = \sum P'' v_i$$

możemy nadać równaniu (756) postać następującą:

$$L_{12} = L_{21} \quad (756')$$

Twierdzenie Betti'ego można stosować i do układów pełnych, mając na względzie motywy analogiczne do przytoczonych przy twierdzeniu Clapeyron'a (paragraf poprzedni), t. j. uważając każde ciało sprężyste za kratownicę o nieskończenie wielkiej liczbie prętów.

5. Twierdzenia Castigliano'a i Ménabréa'i.

Twierdzenie Castigliano'a brzmi, jak następuje:

O ile siły, działające na konstrukcję, wzrastają w sposób ciągły od zera do swej wartości ostatecznej, wówczas przesunięcie punktu zaczepienia każdej z nich w kierunku jej działania równa się pierwszej pochodnej energii sprężystej, nagromadzonej w konstrukcji, względem tej siły.

Twierdzenie to, w zastosowaniu do układów kratowych, uzasadnia się w sposób następujący:

Bierzemy wzór dla energii sprężystej kratownicy (por. § 3) w formie:

$$V = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 l}{EA} \quad (757)$$

Przesunięcie węzła m w kierunku zaczepionej do niego siły P , oznaczamy przez v_m . Przesunięcie to równa się (vid. rozdz. XIV,5):

$$v_m = \sum Z_m \cdot \frac{Sl}{EA} \quad (758)$$

gdzie Z_m oznacza siłę w dowolnym pręcie kratownicy, wywołaną przez siłę $P_m = 1$. Siła S w pewnym pręcie kratownicy wyraża się więc wzorem:

$$S = Z_1 P_1 + Z_2 P_2 + \dots + Z_m P_m \quad (759)$$

z którego, wobec niezależności od siebie sił P , wynika, że

$$\frac{\partial S}{\partial P_m} = Z_m \quad (760)$$

Wstawiając wzór (760) we wzór (758) dla v_m , otrzymujemy:

$$v_m = \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{Sl}{EA} \quad (761)$$

Z drugiej strony, po zróżniczkowaniu równania (757) względem P_m otrzymujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial P_m} = \sum \frac{\partial S}{\partial P_m} \cdot \frac{Sl}{EA} \quad (762)$$

Porównyując ze sobą równania (761) i (762), otrzymujemy, że

$$v_m = \frac{\partial V}{\partial P_m} \quad (763)$$

co wyraża twierdzenie Castigliano'a.

Twierdzenie to, tak samo, jak twierdzenie Clapeyron'a i Betti'ego, może być stosowane nie tylko do kratownicy, lecz i do dowolnego układu sprężystego.

Specjalnie dla belki prostej wyprowadzimy je niezależnie od rozumowania poprzedniego.

Przedstawiamy, mianowicie, energję sprężystą belki zginanej, jako funkcję sił, według wzoru (746):

$$V = \frac{1}{2} a_1 P_1^2 + a_2 P_1 P_2 + \frac{1}{2} b_2 P_2^2 \quad (764)$$

i obliczamy pochodną energii sprężystej względem poszczególnych z tych sił:

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = a_1 P_1 + a_2 P_2 \quad (765)$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_2} = a_2 P_1 + b_2 P_2$$

Wobec równości $a_2 = b_1$, wynikającej z równania Maxwell'a (por. § 4.) mamy, że

$$\frac{\partial V}{\partial P_2} = b_1 P_1 + b_2 P_2 \quad (766)$$

Ponieważ prawe części równań (765) i (766) oznaczają ugięcia belki w punktach zaczepienia sił (por. § 4), więc wzory te przybierają postać następującą:

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = y_1 \quad \frac{\partial V}{\partial P_2} = y_2 \quad (767)$$

wyrażającą równanie Castigliano'a.

Przypuśćmy, iż mamy pewną konstrukcję, podpartą w sposób statycznie niewyznaczalny. Oznaczamy reakcję nadliczbowej podpory przez X i przedstawiamy energję sprężystą układu, jako funkcję:

$$V = f(P, X) \quad (768)$$

Stosując w danym wypadku równanie Castigliano'a, otrzymujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = v_X \quad (769)$$

gdzie v_X oznacza przesunięcie punktu zaczepienia niewiadomej siły X w kierunku jej działania. Ponieważ założyliśmy, iż X jest to reakcja podpory nadliczbowej, więc przesunięcie tej podpory w kierunku działania siły X musi być równe zeru, skąd mamy, że:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (770)$$

W razie większej liczby podpór nadliczbowych otrzymalibyśmy odpowiednio równania:

$$\frac{\partial V}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial X_n} = 0 \quad (771)$$

które pozwoliłyby na całkowite wyznaczenie reakcyj wszystkich niewiadomych podpór.

Podobny sposób postępowania może być też zastosowany, gdy chodzi o wyznaczenie siły działającej w nadliczbowym pręcie kratownicy. Przecinamy, mianowicie, pręt *ab* kratownicy, przedstawionej na rys. 374 (rozdz. XIV,6) i zastępujemy jego działanie przez dwie siły *X*, równe sobie i skierowane odwrotnie. Wyznaczamy na podstawie twierdzenia Castigliano'a wydłużenie pręta nadliczbowego ze wzoru:

$$v_1 = \frac{\partial V_1}{\partial X} \quad (772)$$

gdzie V_1 oznacza energię sprężystą, nagromadzoną w pręcie *ab*.

Zbliżenie się węzłów *a* i *b* w kierunku działania siły *X* otrzymujemy na podstawie tegoż twierdzenia Castigliano'a ze wzoru:

$$v_2 = \frac{\partial V_2}{\partial X} \quad (773)$$

gdzie V_2 oznacza energię sprężystą, nagromadzoną we wszystkich prętach kratownicy poza prętem *ab* (tu $v_2 = v_a - v_b$).

Ponieważ między końcem rozciętego pręta a węzłem *a* przerwy być nie może, musi więc mieć miejsce równanie:

$$v_1 + v_2 = 0$$

lub też równanie:

$$\frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial X} = 0 \quad (774)$$

Ponieważ energia sprężysta całego układu równa się sumie energii w dwóch jego częściach, czyli ponieważ

$$V = V_1 + V_2 \quad (775)$$

więc równanie (774) przybiera postać następującą:

$$\frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (776)$$

Równania (770) i (776) wyrażają, że dla równowagi konstrukcji powinno X występować takie, żeby V było minimum.

O maximum nie może tu być mowy, gdyż we wzorze (745) dla energii sprężystej współczynniki k i k_1 są z natury rzeczy dodatnie, wobec czego druga pochodna $\frac{d^2 V}{dP^2}$ musi tu być również dodatnią.

Równanie (770) lub (776) wyraża tak zwane twierdzenie Ménabréa'i, czyli twierdzenie o minimum energii sprężystej.

6. Zastosowanie równań energii sprężystej do obliczenia odkształceń i wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Weźmy belkę swobodnie podpartą w dwóch punktach i obciążoną w środku siłą P (vid. rys. 147 i wzór 229).

Przyrównywując do siebie dwa wzory dla energii sprężystej, mianowicie, wzór ogólny (733) i wzór Clapeyron'a (744) otrzymujemy:

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2 dx}{2 EJ} = \frac{1}{2} P \cdot y_{\max} \quad (777)$$

Wobec tego, że $M = \frac{P}{2} x$, mamy równanie następujące:

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2 dx}{2 EJ} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P^2}{4} \cdot \frac{x^2 dx}{2 EJ} = \frac{P^2 l^3}{96 EJ} = \frac{1}{2} P y_{\max} \quad (777')$$

skąd

$$y_{\max} = \frac{P l^3}{48 EJ}$$

Stosując do powyższego zadania równanie Castigliano'a, otrzymujemy:

$$y_{\max} = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P^2 l^3}{96 EJ} \right) = \frac{P l^3}{48 EJ} \quad (778)$$