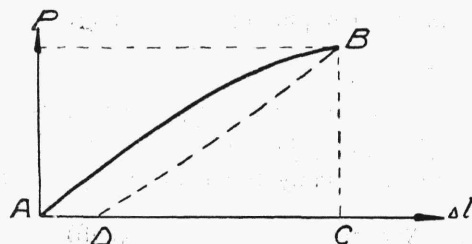
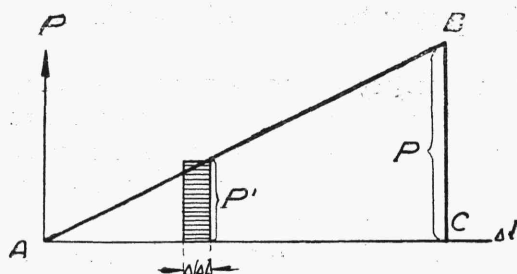


Zależność między siłą wyciągającą (osiową) a wydłużeniem pręta może być przedstawiona na wykresie rys. 400, na którym na osi odciętych odkładamy wydłużenia pręta, spowodowane siłą, zaczepioną do jego końca, a na osi rzędnych odpowiednie wartości siły wyciągającej. Wobec proporcjonalności sił i wydłużeń (w granicach OA na rys. 166) powinien mieć wykres kształt prostej AB . (Dotyczy to i innych odkształceń).

Bierzemy w dowolnym punkcie wykresu nieskończenie mały przyrost $\Delta(\Delta l)$ wydłużenia Δl i odpowiednią wartość siły wyciągającej P' . Iloczyn $P'\Delta(\Delta l)$,



Rys. 400 i 401.

przedstawiający pole nieskończenie małego prostokąta, równa się nieskończenie małemu przyrostowi energii sprężystej w pręcie. Dodając do siebie pola nieskończenie małych prostokątów dla całkowitego wydłużenia Δl , dojdziemy do pola ABC , przedstawiającego całkowitą energię sprężystą pręta wyciąganego.

Z wykresu, odpowiadającego teoretycznemu wykresowi 400, ale otrzymanego drogą doświadczalną (rys. 401) widzimy, że linia AB ma kształt nie prostej, lecz krzywej lekko wypukłej względem osi AP .

Przy stopniowym usuwaniu obciążenia, pręt ulega stopniowemu skracaniu się, lecz proces ten odbywa się już nie według tej samej krzywej AB , co wzrastanie wydłużeń, lecz według odmienną krzywej BD , która przetnie oś Δl w odległości AD od początku współrzędnych. Odcinek AD wyrazi tu pozostałą część wydłużenia pręta. Część energii sprężystej, wyrażająca się polem $ABDA$ przepada, przechodząc w inne rodzaje energii np. w energię cieplną. Opisane zjawisko nosi nazwę histerezy sprężystej i występuje tem słabiej, im lepiej materiał odpowiada warunkom doskonałej sprężystości.

W niniejszym rozdziale ze zjawiskiem histerezy liczyć się nie będziemy, a linię AB będziemy tu uważali za prostą.

4. Równania wzajemności przesunięć sprężystych.

Wyobraźmy sobie, żeśmy zaczepili do belki dwie siły P_1 i P_2 , jednak nie jednocześnie, lecz jedna po drugiej. Wartości tych sił wzrastają od zera do P_1 lub P_2 w sposób ciągły i powolny. Oznaczamy przez

a_1	ugięcie belki w punkcie A pod siłą P_1 przy $P_1 = 1$ i $P_2 = 0$
a_2	" " " " " " " " P_1 " $P_1 = 0$ i $P_2 = 1$
b_1	" " " " B " " " " P_2 " $P_1 = 1$ i $P_2 = 0$
b_2	" " " " " " " " P_2 " $P_1 = 0$ i $P_2 = 1$

Ugięcie belki w punkcie zaczepienia siły P_1 , gdy siła P_2 nie została jeszcze zaczepiona, równa się $a_1 P_1$, zaś odpowiednia energia sprężysta w myśl wzoru (744) wyniesie $V_1 = \frac{1}{2} a_1 P_1^2$. Dopiero po dokonaniu się omówionego odkształcenia, zaczepiamy do belki drugą siłę P_2 . Siła ta, w myśl zasady superpozycji, wywołuje w belce niezależne od poprzednich przesunięcia $a_2 P_2$ pod siłą P_1 i $b_2 P_2$ pod siłą P_2 . Praca siły P_2 na przesunięciu $b_2 P_2$ równa się $V_2 = \frac{1}{2} b_2 P_2^2$.

Co się tyczy pracy siły P_1 na przesunięciu $a_2 P_2$, t. należy mieć na uwadze, że w czasie dokonywania się tego przesunięcia siła P_1 nie wzrastała w sposób ciągły lecz miała już swą ostateczną wartość, którą zdobyła w czasie przesunięcia $a_1 P_1$, i dlatego odpowiednia energia sprężysta będzie tu się równała $V_{12} = a_2 P_2 P_1$. Ostatecznie mamy więc, że:

$$V = V_1 + V_{12} + V_2 = \frac{1}{2} a_1 P_1^2 + a_2 P_1 P_2 + \frac{1}{2} b_2 P_2^2 \quad (746)$$

Stosując w omawianym procesie odkształcenia odwrotną kolejność zaczepiania sił P_1 i P_2 , otrzymamy, że:

$$V = \frac{1}{2} a_1 P_1^2 + b_1 P_1 P_2 + \frac{1}{2} b_2 P_2^2 \quad (747)$$

Z porównania dwóch wzorów, (746) i (747), dla tej samej energii sprężystej, otrzymujemy:

$$a_2 = b_1 \quad (748)$$

lub

$$P a_2 = P b_1 \quad (749)$$

co da się wyrazić słowami w sposób następujący:

Siła P , zaczepiona w dowolnym punkcie A belki, wywołuje w punkcie B przesunięcie, równe przesunięciu, wywoływanemu w punkcie A przez siłę P , zaczepioną w punkcie B .

Jest to tak zwane twierdzenie Maxwell'a.

Twierdzenie Maxwell'a daje się łatwo uogólnić i brzmi wówczas w sposób następujący:

Jeżeli na daną konstrukcję działają kolejno dwa układy sił P' i P'' , to praca sił układu P' wzdłuż przesunięć, wywołanych przez siły układu P'' , równa się pracy sił układu P'' wzdłuż przesunięć, wywołanych przez siły układu P' .

Jest to twierdzenie Betti'ego.

Uzasadnienie twierdzenia w zastosowaniu do układów kratowych opiera się na zasadzie prac wirtualnych.

Oznaczamy tu, podobnie jak w § 3, przez v przesunięcia poszczególnych węzłów kratownicy należycie podpartej w kierunku działania sił P , a przez Δl wydłużenia poszczególnych prętów kratownicy oraz przyjmujemy, zarówno v , jak i Δl , za wirtualne przesunięcia poszczególnych punktów układu. Jednocześnie uważamy siły zewnętrzne P i siły w prętach kratownicy S za siły związane ze sobą i mające kierunek wyżej omówionych przesunięć wirtualnych, jednak naogół od nich niezależne.

W razie jednej tylko siły P mamy tu:

$$Pv - \sum S \Delta l = 0 \quad (750)$$

gdyż iloczyn $S \Delta l$ ma znak ujemny (rozd. XIV,5).

Dla szeregu sił zewnętrznych równanie (750) przekształca się w następujące:

$$\sum Pv - \sum S \Delta l = 0 \quad (751)$$

gdzie suma $\sum S \Delta l$ rozpościera się na siły działające we wszystkich prętach kratownicy i wywołane przez wszystkie siły zewnętrzne P .

Mając na uwadze dwa układy sił P' i P'' , które mają kolejno obciążać kratownicę, wybieramy możliwe przesunięcia w ten sposób, aby w równanie (751) najpierw weszły siły układu P' i przesunięcia, odpowiadające siłom układu P'' , t. j. $\Delta_{\mu} l$ i v_{μ} , następnie zaś naodwrot. W ten sposób otrzymujemy, że:

$$\sum P' v_{\mu} - \sum S' \Delta_{\mu} l = 0 \quad (752)$$

$$\sum P'' v_i - \sum S'' \Delta_i l = 0 \quad (753)$$

Ponieważ $\Delta_{\mu} l = \frac{S'' l}{EA}$ i $\Delta_i l = \frac{S' l}{EA}$, więc równania (752) i (753) przekształcają się w dalszym ciągu w następujące:

$$\sum P' v_{ii} - \sum \frac{S' S'' l}{EA} = 0 \quad (754)$$

$$\sum P'' v_i - \sum \frac{S' S''' l}{EA} = 0 \quad (755)$$

Z porównania wzorów (754) i (755) wynika, że

$$\sum P' v_{ii} = \sum P'' v_i \quad (756)$$

co było do dowiedzenia.

Wprowadziwszy tu oznaczenia;

$$L_{12} = \sum P' v_{ii}, \quad L_{21} = \sum P'' v_i$$

możemy nadać równaniu (756) postać następującą:

$$L_{12} = L_{21} \quad (756')$$

Twierdzenie Betti'ego można stosować i do układów pełnych, mając na względzie motywy analogiczne do przytoczonych przy twierdzeniu Clapeyron'a (paragraf poprzedni), t. j. uważając każde ciało sprężyste za kratownicę o nieskończenie wielkiej liczbie prętów.

5. Twierdzenia Castigliano'a i Ménabréa'i.

Twierdzenie Castigliano'a brzmi, jak następuje:

O ile siły, działające na konstrukcję, wzrastają w sposób ciągły od zera do swej wartości ostatecznej, wówczas przesunięcie punktu zaczepienia każdej z nich w kierunku jej działania równa się pierwszej pochodnej energii sprężystej, nagromadzonej w konstrukcji, względem tej siły.

Twierdzenie to, w zastosowaniu do układów kratowych, uzasadnia się w sposób następujący:

Bierzemy wzór dla energii sprężystej kratownicy (por. § 3) w formie:

$$V = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 l}{EA} \quad (757)$$