

Wstawiając tu, zamiast $\Delta\varphi$ i Δds , ich wartości ze wzorów (516) i (518) z rozdz. XIII,3 i wykonując całkowanie w granicach od 0 do s , dojdziemy do wzoru dla V .

Pomijając we wzorach dla Δds i $\Delta\varphi$ wyraz zawierający r^2 w mianowniku i przyjmując, że $J = Y$, otrzymujemy:

$$V = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EJ} + \frac{MN}{EA r} + \frac{N^2}{2EA} \right) ds \quad (741)$$

Pomijając tu również i wyraz zawierający r w mianowniku, znajdujemy:

$$V = \int_0^s \left(\frac{M^2}{2EJ} + \frac{N^2}{2EA} \right) ds \quad (742)$$

3. Energia sprężysta, jako jednorodna funkcja sił.

Wzór (729) wyprowadzony dla energii sprężystej pręta wyciąganego (lub ściskanego) może być zastosowany i do obliczenia energii sprężystej nagromadzonej przy odkształceniu kratownicy przegubowej. W tym wypadku wzór dla energii sprężystej ma następującą postać:

$$V = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 l}{EA} \quad (743)$$

gdzie S są to siły w prętach kratownicy.

Równanie (743) może być przekształcone na podstawie zasady prac wirtualnych.

Jako możliwe (wirtualne) przesunięcia poszczególnych węzłów kratownicy przyjmujemy tu przesunięcia v tych węzłów w kierunku działania zaczepionych do nich sił zewnętrznych oraz odległości $\Delta l = \frac{S l}{EA}$, na które poszczególne węzły pod działaniem tych sił zbliżyły się do siebie lub oddaliły. Siły zewnętrzne P i siły w prętach kratownicy S uważamy tu za jeden z tych układów sił, które mogą pracować wzdłuż wyżej przyjętych przesunięć wirtualnych. W ten sposób równanie prac wirtualnych (por. wzór 650, rozdz. XIV,5) przybiera tu postać następującą:

$$\sum S \cdot \frac{S \cdot l}{AE} = \sum P \cdot v$$

W związku z tem przekształcamy równanie (743) w następujące:

$$V = \frac{1}{2} \sum P \cdot v \quad (744)$$

Przytoczone równanie może być stosowane nie tylko do kratownic, lecz i do wszystkich innych układów sprężystych. Tłómaczy się to w ten sposób, że każde ciało sprężyste może być uważane za zbiór punktów materialnych, których wzajemne odległości zmieniają się według prawa Hooke'a i które wskutek tego wykonywują pracę w takich samych warunkach, jak węzły układów kratowych.

Taki pogląd na ciało sprężyste, datujący się od Navier'a (rok 1827), nie jest wprawdzie zgodny z ogólnie rozpowszechnionym dziś poglądem na ciało sprężyste, jako wypełniające bez przerw całą swoją objętość, pozwala jednak na wyprowadzenie tych twierdzeń, które mają zastosowanie w mechanice budowli, w sposób prosty i bez nieścisłości.

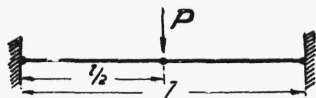
Równanie (744) podane zostało przez Clapeyron'a.¹⁾ Zawiera ono twierdzenie, że energia sprężysta równa się połowie sumy iloczynów sił zewnętrznych przez odpowiednie przesunięcia ich punktów zaczepienia.

Wobec tego, że przesunięcia, wchodzące w równanie (744) są jednorodnymi funkcjami linjowymi sił P , energia sprężysta będzie funkcją jednorodną drugiego stopnia tych sił, czyli, że otrzymamy równanie następujące:

$$V = \sum P_i^2 k + \sum P_i P_j k_1 \quad (745)$$

gdzie współczynniki k i k_1 nie są zależne od sił P .

Są jednak zagadnienia mechaniki budowli, w których energia sprężysta nie jest funkcją jednorodną drugiego stopnia sił zewnętrznych. Ma to miejsce w wypadkach, gdy zawodzi zasada superpozycji t.j. gdy odkształcenia zmieniają wyraźnie sposób działania sił zewnętrznych. Najważniejszymi wypadkami tego rodzaju są: po pierwsze, wypadek jednoczesnego zginania i ściskania (rozd. X,3), po drugie, wypadek, gdy dwa pręty poziome, umocowane przegubowo w dwóch różnych punktach, połączone są ze sobą przegubem, do którego zaczepiono siłę pionową (rys. 399). Ten ostatni wypadek nie ma znaczenia technicznego, gdyż w prętach połączonych przegubowo powinny tu teoretycznie powstawać siły nieskończenie wielkie.

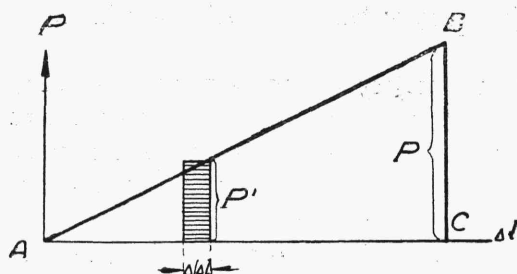


Rys. 399.

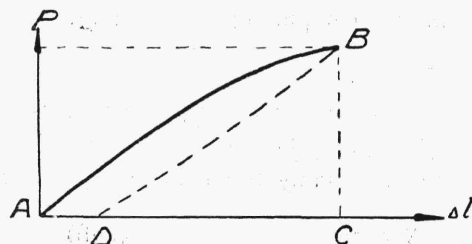
¹⁾ Por. M.G. Lamé „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides”, 1866.

Zależność między siłą wyciągającą (osiową) a wydłużeniem pręta może być przedstawiona na wykresie rys. 400, na którym na osi odciętych odkładamy wydłużenia pręta, spowodowane siłą, zaczepioną do jego końca, a na osi rzędnych odpowiednie wartości siły wyciągającej. Wobec proporcjonalności sił i wydłużeń (w granicach OA na rys. 166) powinien mieć wykres kształt prostej AB . (Dotyczy to i innych odkształceń).

Bierzemy w dowolnym punkcie wykresu nieskończenie mały przyrost $\Delta(\Delta l)$ wydłużenia Δl i odpowiednią wartość siły wyciągającej P' . Iloczyn $P'\Delta(\Delta l)$,



przedstawiający pole nieskończenie małego prostokąta, równa się nieskończenie małemu przyrostowi energii sprężystej w pręcie. Dodając do siebie pola nieskończenie małych prostokątów dla całkowitego wydłużenia Δl , dojdziemy do pola ABC , przedstawiającego całkowitą energię sprężystą pręta wyciąganego.



Rys. 400 i 401.

Z wykresu, odpowiadającego teoretycznemu wykresowi 400, ale otrzymanego drogą doświadczalną (rys. 401) widzimy, że linia AB ma kształt nie prostej, lecz krzywej lekko wypukłej względem osi AP .

Przy stopniowym usuwaniu obciążenia, pręt ulega stopniowemu skracaniu się, lecz proces ten odbywa się już nie według tej samej krzywej AB , co wzrastanie wydłużeń, lecz według odmienniej krzywej BD , która przetnie oś Δl w odległości AD od początku współrzędnych. Odcinek AD wyrazi tu pozostającą część wydłużenia pręta. Część energii sprężystej, wyrażająca się polem $ABDA$ przepada, przechodząc w inne rodzaje energii np. w energię cieplną. Opisane zjawisko nosi nazwę histerezy sprężystej i występuje tem słabiej, im lepiej materiał odpowiada warunkom doskonałej sprężystości.

W niniejszym rozdziale ze zjawiskiem histerezy liczyć się nie będziemy, a linię AB będziemy tu uważali za prostą.

4. Równania wzajemności przesunięć sprężystych.

Wyobraźmy sobie, żeśmy zaczepili do belki dwie siły P_1 i P_2 , jednak nie jednocześnie, lecz jedna po drugiej. Wartości tych sił wzrastają od zera do P_1 lub P_2 w sposób ciągły i powolny. Oznaczamy przez