

rzeczywistej. Gdy więc np. przesunięcie pewnego punktu danej belki równa się 0, a odpowiednie przesunięcie zastępczej belki statycznie wyznaczalnej równa się  $y$ , wówczas ustawiamy równanie:  $y = 0$ . Liczba omówionych równań odpowiada liczbie usuniętych zamocowań i wynosi  $n - 3$ .

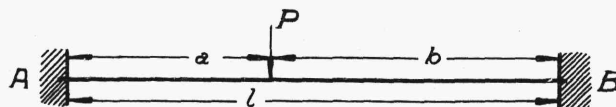
Ponieważ z powyższego wynika, że niektóre siły zewnętrzne w belkach statycznie niewyznaczalnych (reakcje) zależą od odkształceń belek, możemy więc twierdzić, że momenty zginające zależne tu są od wymiarów poprzecznych belek.

Wskazany sposób obliczania układów statycznie niewyznaczalnych będziemy nazywali geometrycznym (t. zn. geometrycznego dodawania odkształceń), lub kinematycznym dla odróżnienia od drugiego możliwego sposobu obliczenia, omówionego w rozdziale o energii sprężystej (rozdz. XVI).

Istnieją trzy zasadnicze typy belek prostych statycznie niewyznaczalnych o stałych zamocowaniach i szereg typów belek o zamocowaniach sprężystych.

## 2. Belka na obydwóch końcach utwierdzona.

Mamy tu na widoku belkę utwierdzoną na końcach w sposób niesprężysty (rys. 206). Belka jest prosta i ma stały przekrój poprzeczny. Obie podpory  $A$  i  $B$  są to podpory płaskie, z których każda wymaga wyznaczenia 3 niewiadomych. Mamy w ten sposób do wyznaczenia trzy wielkości statycznie niewyznaczalne ( $2 \cdot 3 - 3 = 3$ ).



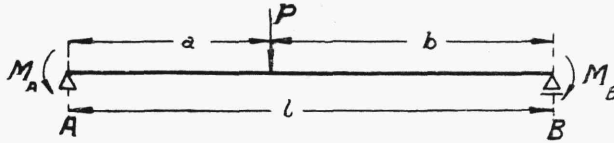
Rys. 206.

O ile obciążenie belki jest prostopadłe do osi, obie poziome składowe reakcyj równe są zeru, a równanie  $\Sigma X = 0$  staje się tożsamością. W ten sposób liczba pozostających do wyznaczenia wielkości statycznie niewyznaczalnych równa się dwu ( $2 \cdot 2 - 2 = 2$ ).

Mamy w danym wypadku do czynienia z czterema zamocowaniami, na które składają się 2 utwierdzenia końcowych przekrojów belki i 2 zamocowania, uniemożliwiające pionowe przesunięcia jej końców. Stosując tu omówioną wyżej metodę, możemy odrzucić albo dwa pierwsze zamocowania, albo też po jednym z każdych dwóch.

Pierwszy sposób zastosujemy tu do belki obciążonej siłą skupioną  $P$ , zaczepioną w odległości  $a$  i  $b$  od końców belki (rys. 206).

Odrzucamy dwa utwierdzenia końcowych przekrojów. Dochodzimy tą



Rys. 207.

drogą do belki podpartej w dwóch punktach (rys. 207), obciążonej siłą  $P$  i dwoma momentami  $M_A$  i  $M_B$ , zaczepionymi odpowiednio do przekrojów  $A$  i  $B$ .

Siła  $P$  wywołuje następujące obroty końcowych przekrojów belki (kierunki osi współrzędnych przyjęte tu są według rozdz. VII, 5 rys. 139).

$$\varphi_A^P = - \frac{Pb \cdot (l^2 - b^2)}{6 l EJ} \quad (347)$$

$$\varphi_B^P = \frac{Pab \cdot (2l - b)}{6 l EJ} \quad (348)$$

Momenty  $M_A$  i  $M_B$  wywołują łącznie następujące kąty obrotu tych samych przekrojów w przypuszczeniu, że wyginają one belkę ku dołowi (rozdz. VII, 6):

$$\varphi_A^M = - \frac{l}{6 EJ} \cdot (2M_A + M_B) \quad (349)$$

$$\varphi_B^M = \frac{l}{6 EJ} \cdot (2M_B + M_A) \quad (350)$$

Ponieważ w rzeczywistości przekroje  $A$  i  $B$  belki nie mogą ulec obrotowi, gdyż są utwierdzone, mamy więc dwa równania następujące:

$$\varphi_A = \varphi_A^P + \varphi_A^M = 0 \quad (351)$$

$$\varphi_B = \varphi_B^P + \varphi_B^M = 0 \quad (352)$$

czyli, że:

$$- \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6 l EJ} - \frac{l}{6 EJ} \cdot (2M_A + M_B) = 0 \quad (353)$$

$$\frac{Pab(2l - b)}{6 l EJ} + \frac{l}{6 EJ} \cdot (2M_B + M_A) = 0 \quad (354)$$

Z równań tych otrzymujemy:

$$M_A = - \frac{Pb^2(l-b)}{l^2} = - \frac{Pb^2a}{l^2} \quad (355)$$

$$M_B = - \frac{Pb(l-b)^2}{l^2} = - \frac{Pba^2}{l^2} \quad (356)$$

Ponieważ momenty otrzymaliśmy tu ujemne, wynika stąd, że są one skierowane odwrotnie, niż to zakładaliśmy, stosując wzory (349) i (350); będą one zwrócone wobec tego według rys. 207. Znając momenty  $M_A$  i  $M_B$ , pozostałe niewiadome zadania, mianowicie reakcje  $A$  i  $B$ , wyznaczamy z równań statyki:

$$\Sigma M = R_A l - M_A + M_B - P \cdot b = 0 \quad (357)$$

$$\Sigma Y = R_A + R_B - P = 0 \quad (358)$$

W razie, gdy  $a = b$ , ze wzorów (355) i (356) otrzymujemy:

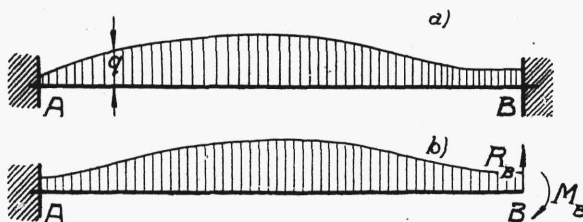
$$M_A = M_B = - \frac{Pl}{8} \quad (359)$$

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \quad (360)$$

Moment pod ciężarem  $P$  równa się w tym wypadku:

$$M_P = M_{sr} = R_A \cdot \frac{l}{2} + M_A = \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{8} = \frac{Pl}{8} \quad (361)$$

Obliczenie belki, utwierdzonej w dwóch końcach i obciążonej w sposób ciągły, może być wykonane analogicznie do poprzedniego. Zastosujemy tu jednak inny sposób obliczenia, oparty na innym układzie zastępczym (rys. 208).



Rys 208.

Odrzucamy, mianowicie, prawą podporę  $B$  wraz z jej dwoma zamocowaniami i dochodzimy w ten sposób do schematu wspornika, obciążonego poza danym ob-

ciążeniem zewnętrznym, jeszcze momentem  $M_B$  i siłą pionową  $R_B$ , skierowaną ku górze (por. rozdz. VII, 5).

Ugięcie  $y_B^R$  prawego końca belki pod działaniem siły  $R_B$  wynosi dla stosowanych wyżej osi współrzędnych (według rys. 139 z rozdz. VII):

$$y_B^R = \frac{R_B \cdot l^3}{3 E J} \quad (362)$$

Kąt obrotu prawego przekroju końcowego belki pod działaniem tejże siły równa się:

$$\varphi_B^R = \frac{R_B \cdot l^2}{2 E J} \quad (363)$$

Odpowiednio dla wielkości  $y_B^M$  i  $\varphi_B^M$ , zależnych od momentu  $M_B$ , który uważamy za wyginający belkę ku górze, otrzymujemy:

$$y_B^M = \frac{M_B \cdot l^2}{2 E J} \quad (364)$$

$$\varphi_B^M = \frac{M_B \cdot l}{E J} \quad (365)$$

Wreszcie przez  $y_B^q$  i  $\varphi_B^q$  oznaczamy odpowiednio ugięcie i kąt obrotu w punkcie  $B$  pod działaniem obciążenia ciągłego  $q$ .

Ponieważ, w rzeczywistości, zarówno ugięcie, jak i obrót belki w punkcie  $B$  musi być równy zeru, mamy więc w ogólnym wypadku:

$$y_B^R + y_B^q + y_B^M = 0 \quad (366)$$

$$\varphi_B^R + \varphi_B^q + \varphi_B^M = 0 \quad (367)$$

W razie, gdy  $q$  jest stałe na całej długości belki,  $R_B = q \frac{l}{2}$ , zaś

$$y_B^R = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l^3}{3 E J} \quad (368)$$

W tym samym wypadku

$$y_B^q = - \frac{ql^4}{8 E J} \quad (369)$$

a z równania (366) otrzymujemy:

$$\frac{ql^4}{6EJ} - \frac{ql^4}{8EJ} + \frac{M_B \cdot l^2}{2EJ} = 0 \quad (370)$$

$$M_B = M_A = -\frac{1}{12}ql^2$$

skąd wynika, że moment  $M_B$  skierowany jest według rys. 208.

Moment w środku belki otrzymamy tu ze wzoru

$$M_{sr} = R_A \cdot \frac{l}{2} + M_A - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{24}ql^2 \quad (371)$$

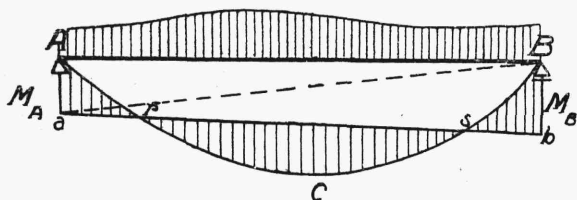
Jeżeli ten moment uważamy za dodatni, to moment (370) powinniśmy uważać za ujemny.

Do wyznaczenia kątów  $\varphi$  w poprzednich zadaniach, zwłaszcza w wypadkach bardziej skomplikowanych, dogodnym jest posługiwanie się metodą momentów wtórnych.

Metoda momentów wtórnych może być również z pożytkiem wyyskana do obliczenia ugięć belki na dwóch końcach utwierdzonej i innych belek statycznie niewyznaczalnych.

Przystępujemy do obliczenia tych ugięć.

Mając dla belki utwierdzonej w obydwóch końcach wykres momentów zginających od sił zewnętrznych (rys. 209), uzupełniamy ten wykres przede-

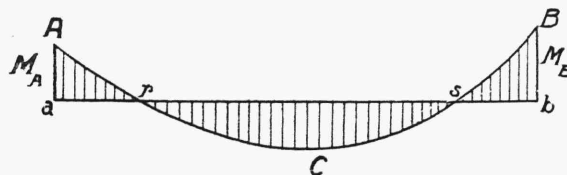


Rys. 209.

dwuszystkiem wykresami momentów zginających, wywołanych przez momenty podporowe  $M_A$  i  $M_B$ . Wykresy te mają kształt trójkątów, wspólnie zaś tworzą trapez (rys. 209). Dla belki swobodnie podpartej i obciąże-

nia wtórnego, składającego się z pola  $ACBbsraA$ , znajdujemy momenty zginające wtórne  $M$ , które podzielone przez  $EJ$  dadzą nam ugięcia belki w odpowiednich punktach.

Krzywa  $ACB$ , stanowiąca wykres momentów zginających belki utwierdzonej w dwóch końcach, odniesiona jest do jednej poziomej prostej na rys. 210.



Rys. 210.

W razie obciążenia ciągłego i równomiernego ugięcie dla belki swobodnie podpartej zostało obliczone w rozdz. VII i wynosi:

$$y_1 = \frac{5}{384} \cdot \frac{q l^4}{EJ} \quad (372)$$

Wykres momentów zginających, odpowiadających momentom podporowym  $M_A = M_B$ , ma kształt prostokąta, czyli że obciążenie wtórne jest w danym wypadku ciągłe, a wtórny moment zginający równa się:

$$M_2 = \frac{1}{12} \cdot q l^2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{q l^3}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{96} \cdot q l^4 \quad (373)$$

czemu odpowiada ugięcie:

$$y_2 = \frac{1}{96} \cdot \frac{q l^4}{EJ} \quad (374)$$

Odejmując od ugięcia  $y_1$  ugięcie  $y_2$ , otrzymujemy:

$$y = y_1 - y_2 = \left( \frac{5}{384} - \frac{1}{96} \right) \frac{q l^4}{EJ} = \frac{1}{384} \cdot \frac{q l^4}{EJ} \quad (375)$$

Dla ciężaru skupionego, znajdującego się pośrodku belki utwierdzonej w dwóch końcach, najprościej będzie obliczyć ugięcia bezpośrednio z równania odkształconej, które otrzyma tu postać:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P x}{2} + M \quad (376)$$

gdzie

$$M = M_A = M_B = -\frac{Pl}{8} \quad (377)$$

Całkując równanie (376) dwukrotnie, otrzymujemy:

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4} - \frac{Pl}{8}x + C_1 \quad (378)$$

$$EJ \cdot y = \frac{Px^3}{12} - \frac{Pl}{8} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (379)$$

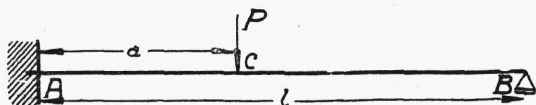
Ponieważ przy  $x = 0$  zarówno  $y$ , jak i  $\frac{dy}{dx}$  równa się 0, więc stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$  też równe są zeru. Dla  $x = \frac{l}{2}$  równanie (379) daje nam:

$$y = \frac{P}{EJ} \cdot \left( \frac{l^3}{8 \cdot 12} - \frac{Pl}{8} \cdot \frac{l^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \quad (380)$$

$$y = -\frac{Pl^3}{192 EJ} \quad (381)$$

### 3. Belka utwierdzona na jednym końcu i swobodnie podparta na drugim.

Belka utwierdzona na jednym końcu i podparta na drugim może być uważana za szczególny wypadek belki na dwóch końcach utwierdzonej, gdy



Rys. 211.

jeden z momentów podporowych np.  $M_B$  równa się zeru (rys 211). Możemy tu wyzyskać równanie (366), zachowujące swą moc i dla danego wypadku pod warunkiem, że  $y_B^M = 0$ .

W razie obciążenia ciągłego i równomiernego równanie (366) przybiera postać następującą:

$$y_B^B + y_B^q = \frac{R_B \cdot l^3}{3 EJ} - \frac{ql^4}{8 EJ} = 0 \quad (382)$$

stąd

$$R_B = \frac{3}{8} ql, \text{ a więc } R_A = \frac{5}{8} ql \quad (383)$$