

$$\begin{aligned}
 &= \sin \omega \cos \omega \int_A (y^2 - x^2) dA + (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) \int_A xy dA = \\
 &= (J_x - J_y) \frac{\sin 2\omega}{2} + J_{xy} \cos 2\omega \quad (40)
 \end{aligned}$$

Obliczamy kąt ω_g , przy którym osie $O\xi$ i $O\eta$ byłyby osiami głównymi (przy początku współrzędnych w punkcie O). W tym celu ustawiamy równanie:

$$J_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = 0 \quad (41)$$

Równaniu temu zapomocą wzoru (40) nadajemy następującą postać:

$$\operatorname{tg} 2\omega_g = \frac{2 J_{xy}}{J_y - J_x} \quad (42)$$

Ze wzoru (42) wyznaczamy dwie wartości kąta ω_g , które będą oznaczać nachylenia głównych osi $O\xi$ i $O\eta$ względem osi OX . Osie główne będziemy przeważnie oznaczali przez OX^g i OY^g (o ile w grę będą wchodziły i inne osie). Jeżeli jakieś osie $O'\xi$ i $O'\eta$ nie mają wspólnego początku współrzędnych z osiami OX i OY , wówczas dla ustalenia zależności między momentami bezwładności względem tych osi J'_{ξ} , J'_{η} a momentami bezwładności J_x i J_y korzystamy najpierw ze wzorów (37) i (37') dla osi OX i OY oraz dla osi $O\xi$ i $O\eta$, równoległych do osi $O'\xi$ i $O'\eta$ i przechodzących przez punkt O , poczem uciekamy się (wzór 25) do zależności między momentami bezwładności, odpowiadającymi osiom do siebie równoległym t. j. osiom $O'\xi$ i $O\xi$ oraz $O'\eta$ i $O\eta$.

5. Elipsa bezwładności i koło Mohr'a.

Zależność, istniejąca między momentem bezwładności J_{ξ} danego pola względem osi $O\xi$, nachylonej pod kątem ω względem osi głównej OX^g , a momentami bezwładności J_x^g i J_y^g tegoż pola względem osi głównych może być przedstawiona zapomocą wykresu, zwanego elipsą bezwładności.

W tym celu wprowadzamy tu pojęcie promienia bezwładności, które określamy wzorem:

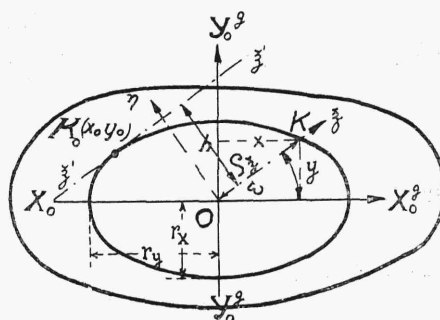
$$r_{\xi} = \sqrt{\frac{J_{\xi}}{A}}, \text{ czyli że: } J_{\xi} = r_{\xi}^2 \cdot A \quad (43)$$

Wzór (38) przybiera dzięki temu postać następującą:

$$r_{\xi}^2 = r_x^2 \cos^2 \omega + r_y^2 \sin^2 \omega \quad (44)$$

Od punktu O (rys. 54) wzdłuż osi $O\xi$, OX i OY odkładamy odcinki ρ odwrotnie proporcjonalne do odpowiednich promieni bezwładności, mianowicie, odcinki:

$$\begin{aligned} \rho_{\xi} &= \frac{m^2}{r_{\xi}} & \rho_x &= \frac{m^2}{r_x} \\ \rho_y &= \frac{m^2}{r_y} \end{aligned} \quad (45)$$



Rys. 54.

Wobec wprowadzonych oznaczeń wzór (38) przekształca się w następujący:

$$\frac{1}{\rho_{\xi}^2} = \frac{\cos^2 \omega}{\rho_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\rho_y^2} \quad (46)$$

W dalszym ciągu współrzędne końca K odcinka ρ_{ξ} oznaczamy przez x i y (rys. 54) i wstawiamy tu $x = \rho_{\xi} \cos \omega$ i $y = \rho_{\xi} \sin \omega$, poczem otrzymujemy:

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1 \quad (47)$$

Ze wzorów (45) wynika, że, o ile założymy:

$$m^2 = r_x \cdot r_y \quad (48)$$

wówczas $\rho_x = r_y$, a $\rho_y = r_x$ czyli że

$$\frac{x^2}{r_y^2} + \frac{y^2}{r_x^2} = 1 \quad (49)$$

Równanie (49) jest więc równaniem elipsy (elipsa bezwładności), której długości osi wynoszą $2r_y$ i $2r_x$.

Przeprowadzamy w pewnym punkcie $K_0 (x_0, y_0)$ elipsy styczną do niej. Styczna ta będzie więc miała równanie następujące:

$$\frac{x_0 x}{r_y^2} + \frac{y_0 y}{r_x^2} = 1 \quad (50)$$

Z drugiej strony ustawiamy normalne równanie prostej:

$$y = x \operatorname{tg} \omega + c \quad (51)$$

i wprowadzamy do niego długość h prostopadłej, przeprowadzonej do tej prostej z punktu O , początku współrzędnych:

$$y = x \operatorname{tg} \omega + \frac{h}{\cos \omega}$$

skąd:

$$h = -x \sin \omega + y \cos \omega \quad (52)$$

lub wreszcie:

$$-\frac{\sin \omega}{h} x + \frac{\cos \omega}{h} y = 1 \quad (53)$$

W dalszym ciągu ustalamy zależność między h , r_y i r_x .

Zakładając, że równania (50) i (51) odpowiadają jednej i tej samej prostej, dochodzimy do następujących stosunków:

$$\frac{x_0}{r_y^2} = -\frac{\sin \omega}{h} \quad ; \quad \frac{y_0}{r_x^2} = \frac{\cos \omega}{h} \quad (54)$$

czyli, że

$$\frac{\frac{x_0}{r_y^2}}{-\sin \omega} = \frac{1}{h} = \frac{\frac{y_0}{r_x^2}}{\cos \omega} \quad (55)$$

Podnosimy stosunki (55) do drugiej potęgi:

$$\frac{\frac{x_0^2}{r_y^2}}{r_y^2 \sin^2 \omega} = \frac{\frac{y_0^2}{r_x^2}}{r_x^2 \cos^2 \omega} = \frac{1}{h^2} \quad (56)$$

Stąd, w myśl znanych własności stosunków geometrycznych, mamy, że

$$\frac{\frac{x_0^2}{r_y^2}}{r_y^2 \sin^2 \omega} + \frac{\frac{y_0^2}{r_x^2}}{r_x^2 \cos^2 \omega} = \frac{1}{h^2} \quad (57)$$

co, wobec równania (49), daje:

$$h^2 = r_y^2 \sin^2 \omega + r_x^2 \cos^2 \omega \quad (58)$$

Z porównania wzorów (44) i (58) wynika, że, jeżeli w elipsie zbudowanej na osiach $2r_y$ i $2r_x$ przeprowadzimy styczną równoległą do osi O_ξ , względem której bierzemy moment bezwładności J_ξ , wówczas wielkość h wyrazi promień bezwładności r_ξ poszukiwanego momentu, czyli, że $J_\xi = h^2 A$.

O ile punkt O jest środkiem ciężkości pola, wówczas omawiana elipsa nosi nazwę środkowej (lub centralnej) elipsy bezwładności.

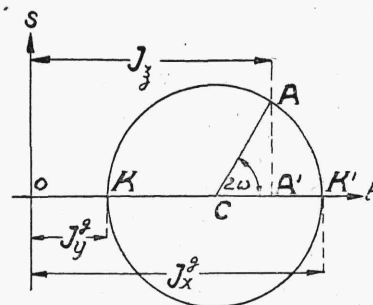
Inny rodzaj przedstawienia momentów bezwładności danego pola daje tak zwany wykres Mohr'a (rys. 55).

Aby wykres ten sporządzić, zastępujemy przedewszystkiem wchodzące we wzór (38) funkcje trygonometryczne przez funkcje podwójnego kąta:

$$J_\xi = \frac{J_x^g + J_y^g}{2} + \frac{J_x^g - J_y^g}{2} \cos 2\omega \quad (59)$$

Wzdłuż dowolnej osi ot (rys. 55) od punktu O odkładamy w pewnej skali odcinki równe J_x^g i J_y^g i na odcinku $J_x^g - J_y^g$, jako na średnicy, zataczamy koło (promień CK).

Odległość od osi os do punktu A , końca promienia, nachylonego względem osi ot pod kątem 2ω , będzie wobec wzoru (59) równa J_ξ , gdyż



Rys. 55.

$$OC = \frac{J_x^g + J_y^g}{2}, \text{ a } CA' = \frac{J_x^g - J_y^g}{2} \cos 2\omega \quad (60)$$