

Odległość a_x środka ciężkości pola danej figury względem pewnej osi XX wyznaczamy ze wzoru:

$$a_x = \frac{S_x}{A}$$

gdzie S_x oznacza moment statyczny pola figury względem osi XX , zaś A pole tej figury. Wzór ten wynika bezpośrednio ze wzoru (12). Momenty statyczne pól mają zawsze wymiar cm^3 .

2. Momenty bezwładności względem osi środkowych i osi do nich równoległych.

Momentem bezwładności szeregu sił równoległych względem danego punktu nazywamy sumę

$$J = \sum P \cdot y^2 \quad (17)$$

gdzie y oznacza odległość danego punktu od linii działania każdej z sił P .

Gdy mamy do czynienia z siłami ciężkości, w szczególności w razie zadania płaskiego, omówionego w paragrafie poprzednim, wzór (17) otrzymuje postać:

$$J = \sum \Delta A \cdot q \cdot y^2 \quad (18)$$

W szczególnym wypadku, gdy $q = 1 \text{ k/cm}^3$, mówimy, iż mamy do czynienia z momentem bezwładności pola. Z tym tylko wypadkiem mamy właściwie do czynienia w mechanice budowli.

W razie krzywolinijnego obwodu pola suma (18) przeistacza się w całkę następującą:

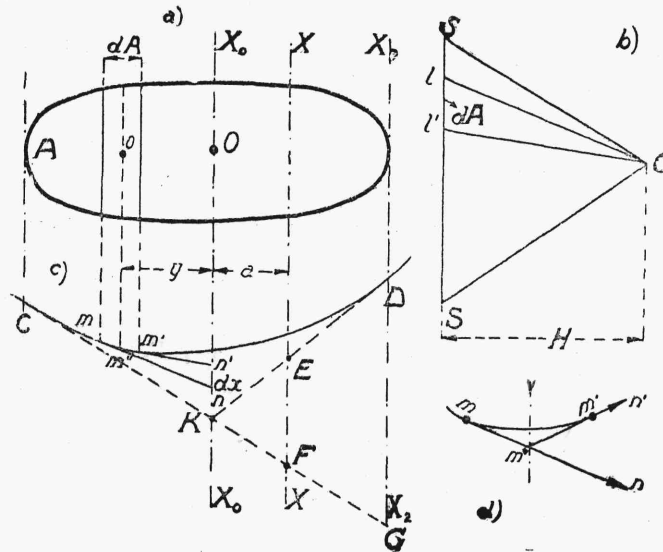
$$J = \int_A y^2 dA \quad (19)$$

Wskaźnik A przy znaku całki oznacza tu, że całkowanie dotyczy całej powierzchni pola A .

W ogólnym wypadku obliczenie J wykonywamy, wyzyskując pewne właściwości wieloboku sznurowego lub, ściślej, krzywej sznurowej.

Chcemy, dajmy na to, obliczyć moment bezwładności pola A (rys. 47) względem osi X_0X_0 , przechodzącej przez jej środek ciężkości (oś środkową). Dzielimy pole A prostymi, równoległymi do X_0X_0 na paski o polu dA i zaczepiamy do środków ciężkości pasków wyobrażalne siły równe liczbowo dA . Rys 47a i 47b przedstawiają dla sił dA odpowiednio wielobok sił i krzywą sznurową.

Przedłużamy proste, ograniczające pasek dA , do przecięcia się z krzywą sznurową w punktach m i m' (rys. 47c i powiększenie na 47d) i przepro-



Rys. 47.

wadzamy w tych punktach styczne, które przecinają się w punkcie m'' , leżącym, w myśl teorii krzywej sznurowej i wieloboku sznurowego (rozdz. I, 3 i II, 4), na prostej, równoległej do X_0X_0 i przechodzącej przez środek ciężkości paska o (rys. 47a i c). Styczne odcinają na osi X_0X_0 nieskończenie mały odcinek $nn' = dx$.

Proste, równoległe do $m'n'$ i do mn i wychodzące z bieguna O , odcinają na prostej SS część ll' , odpowiadającą na wieloboku sił polu dA .

Wobec podobieństwa trójkątów $m''nn'$ i lOl' mamy, że

$$\frac{dA}{H} = \frac{dx}{y} \quad (20)$$

gdzie y oznacza odległość środka ciężkości pola dA od osi X_0X_0 , zaś H odległość biegunową.

W związku z równaniem (20) całka (19) otrzymuje postać:

$$J = \int_A y^2 dA = H \int_A y dx \quad (21)$$

Ponieważ iloczyn ydx jest podwójnym polem trójkąta $m''nn'$, więc całka $\int ydx$ wyraża podwójne pole $CKDC$, zawarte między krzywą sznurową a dwiema stycznymi CK i KD przeprowadzonymi w końcach tej krzywej.

Wynika stąd, iż obliczając pole CKD i mnożąc je przez $2H$, wyznaczymy poszukiwany moment bezwładności J danego pola względem osi X_0X_0 .

Przy takim sposobie postępowania powinniśmy odległość biegunową H odmierzać w skali sił dA , a więc w skali pól (cm^2), zaś wielkości linjowe, służące do obliczenia pola CKD , w skali długości (cm).

Obliczenie J dla dowolnej osi XX równoległej do X_0X_0 odbywa się w ten sam sposób, jak wyżej, przyczem pole wyrażone całką $\int_A ydx$ ulegnie tu powiększeniu o podwójne pole trójkąta EKF (rys. 47c) czyli będzie to pole $CFEDC$.

Wynika stąd, że

$$J_x = J_x^o + a \cdot \overline{EF} \cdot H \quad (22)$$

gdzie a jest to odległość osi XX od osi X_0X_0 , a J_x i J_x^o są to momenty bezwładności pola A , odpowiadające obydwom tym osiom.

Wreszcie moment bezwładności pola danej figury względem osi X_2X_2 , równoległej do osi X_0X_0 i stycznej do jej obwodu, będzie się równa polu $CGDC$ całej figury, pomnożonemu przez $2H$.

Ponieważ odcinek EF jest proporcjonalny do momentu statycznego pola A względem osi XX , możemy więc napisać, na podstawie poprzedniego paragrafu (wzór 8), że

$$\overline{EF} = \frac{A \cdot a}{H} \quad (23)$$

W związku ze wzorem (23) wzór (22) przybiera następującą postać:

$$J_x = J_x^o + a^2 \cdot A \quad (24)$$

Ten sam wzór otrzymać możemy, wstawiając we wzór (21) zamiast y , sumę $y_x = y + a$, gdzie y_x oznacza odległość środka ciężkości pola dA od osi XX . Mamy więc w tym wypadku:

$$J_x = \int_A y_x^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A a^2 dA + 2 \int_A ay dA$$

Ponieważ $\int_A y dA$, jako moment statyczny całego pola A względem jego środka ciężkości, równa się 0, mamy więc:

$$J_x = J_x^o + a^2 \cdot A \quad (25)$$

Ze wzoru (24) wynika, że moment bezwładności obliczony dla osi $X_0 X_0$, przechodzącej przez środek ciężkości pola A jest najmniejszym z momentów, obliczonych względem wszystkich osi równoległych do danego kierunku.

Wyznaczenie momentu bezwładności musi tu odbywać się zwykłą w obliczeniach wykreślnych drogą zamiany nieskończenie małych wielkości dA przez małe skończone wielkości ΔA , a krzywej sznurowej przez wielobok sznurowy. Ścisłość obliczenia będzie tem większa, im na większą liczbę pól ΔA podzielimy całkowite pole A .

Powyższy wykreślny sposób obliczenia momentów bezwładności zwany sposobem Mohr'a, stosujemy przeważnie wtedy, gdy chodzi o wyznaczenie momentów bezwładności pól o skomplikowanym kształcie obwodu.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie momentu bezwładności dla pól o kształcie prostym, to daje się on wyrazić za pomocą prostych zamkniętych wzorów, dogodnych w użyciu.

Mamy więc np. do obliczenia moment bezwładności prostokąta $AA'B'B$ (rys. 48) względem jego boku BB' (oś XX).

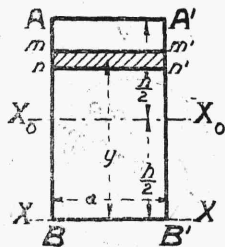
Dzielimy prostokąt równoległe do BB' na paski $mnn'm'$ o wysokości dy . Całka (21) przybiera wobec tego postać:

$$J_x = \int_0^h ay^2 dy = \frac{a \cdot h^3}{3} \quad (26)$$

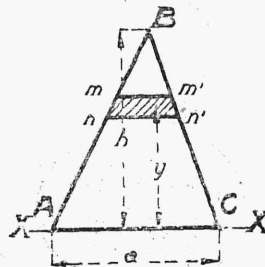
Moment bezwładności prostokąta $AA'B'B$ względem jego środka ciężkości obliczamy ze wzoru (24), wstawiając tu J_x obliczone ze wzoru (26).

Moment ten równa się:

$$J_x^o = \frac{a \cdot h^3}{12} \quad (27)$$



Rys. 48.



Rys. 49.

Obliczamy w dalszym ciągu moment bezwładności pola trójkąta ABC (rys. 49) względem podstawy AC (oś XX). Dzielimy w tym celu pole

trójkąta na trapezy $mm'n'n$ o wysokości dy . Ponieważ pole każdego z małych trapezów równa się:

$$dA = \frac{a \cdot (h - y)}{h} dy$$

więc dla momentu bezwładności otrzymujemy wzór:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h \frac{a \cdot (h - y)}{h} y^2 dy = \frac{a \cdot h^3}{12} \quad (28)$$

Momenty bezwładności pól mają zawsze wymiar cm^4 .

3. Biegunowe momenty bezwładności i momenty odśrodkowe.

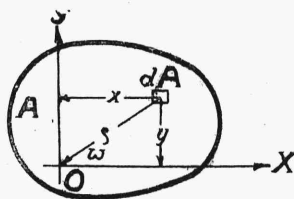
Przy obliczaniu momentów bezwładności pól natrafiamy na pewne całki określone, dla których uтары się pewne nazwy.

O ile weźmiemy figurę płaską o polu A , odniesioną do osi OX i OY i oznaczmy przez dA nieskończenie małą cząstkę umówionego pola (rys. 50), wówczas całkę określoną

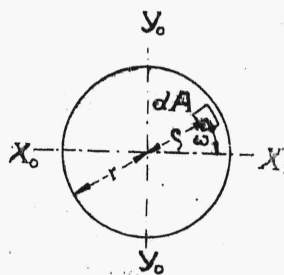
$$J_o = \int_A \rho^2 dA \quad (29)$$

gdzie ρ jest to odległość środka ciężkości pola dA od punktu O , nazywamy biegunowym momentem bezwładności danego pola względem punktu O .

Dla przykładu, obliczamy poniżej biegunowy moment bezwładności pola koła względem jego środka (rys. 51).



Rys. 50



Rys. 51.

Oznaczamy przez ω kąt, jaki tworzy promień ρ z osią X_0 , i rozwiązujemy zadanie we współrzędnych biegunowych.