

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (990)$$

Wstawiając naprężenia τ_x i τ_y we wzór (961), bezpośrednio otrzymujemy:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \quad (991)$$

lub, biorąc pod uwagę równanie (990), mamy, że

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{6q}{h^3} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (992)$$

skąd, drogą całkowania, dochodzimy do następującego wzoru dla naprężenia σ_z , jako funkcji z :

$$\sigma_z = - \frac{6q}{h^3} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{h^2 z}{4} \right) - \frac{q}{2} \quad (993)$$

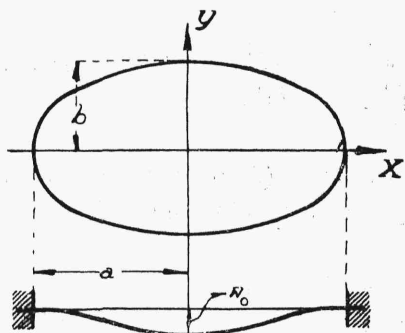
2. Płyty eliptyczne i koliste.

Płyty eliptyczne i koliste występują w budownictwie, jako dna cylindrycznych zbiorników, jako podłogi lub fundamenty cylindrycznych wież i t.d., wreszcie, jako pokrywy różnego rodzaju włączów. We wszystkich tych wypadkach uważać można obciążenie płyty za ciągłe i równomierne. Co się tyczy sposobu podparcia, to przeważnie płyty te są utwierdzone wzdłuż całego obwodu, z wyjątkiem fundamentów i włączów, które uważamy za swobodnie podparte. Jednak i w tym ostatnim wypadku możemy stosować schemat płyty utwierdzonej, gdyż przy obliczeniu płyt chodzi najczęściej o wyznaczenie nie ugięcia, lecz największych naprężeń, które nie są w płycie utwierdzonej mniejsze, niż w podpartej, zastosowanie więc wymienionego schematu nie zmniejsza tu naogół stopnia bezpieczeństwa płyty.

Obliczenie płyty eliptycznej (a więc w szczególnym wypadku i kolistej), obciążonej w sposób ciągły i równomierny i utwierdzonej wzdłuż obwodu, daje się skutecznie bezpośrednio zapomocą równania różniczkowego płyty:

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

Rozwiązanie polega tu na założeniu *a priori*, że równanie odkształco-nej powierzchni środkowej płyty ma postać następującą (rys. 456):



Rys. 456.

$$w = w_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad (994)$$

gdzie

$$w_0 = \frac{q(1 - \mu^2)}{2 Eh^3 \left(\frac{1}{a^4} + \frac{2}{3 a^2 b^2} + \frac{1}{b^4} \right)} \quad (995)$$

i na sprawdzeniu, czy rzeczywiście wzór ten czyni zadość zarówno równaniu (990), jak i warunkom brzegowym eliptycznej płyty utwardzonej. We wzorze (994) a i b oznaczają odpowiednio długości półosi elipsy.

Przy $x = 0$ i $y = 0$, $w = w_0$, czyli w oznacza tu ugięcie płyty w środku.

Przy $x = a$ i $y = 0$ oraz przy $x = 0$ i $y = b$ (rys. 456), $w = 0$ oraz $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, co odpowiada wypadkowi utwardzenia płyty.

Aby uczynić zadość równaniu (990), obliczamy kolejne pochodne w ; mamy więc, że:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{4 w_0 x}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (996)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4 w_0 y}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (997)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{8 w_0 x^2}{a^4} + \frac{4 w_0}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (998)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{8 w_0 y^2}{b^4} + \frac{4 w_0}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (999)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{24 w_0 x}{a^4} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{8 w_0 y}{a^2 b^2} \quad (1000)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{8 w_0 x}{a^2 b^2} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{24 w_0 y}{b^4} \quad (1001)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{24 w_0}{a^4} \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{8 w_0}{a^2 b^2} \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{24 w_0}{b^4} \quad (1002)$$

Wstawiając wzory (996) — (1002) w równanie (990), dochodzimy do tożsamości. Wzory dla naprężeń przybierają tu następującą postać:

$$\sigma_x = - \frac{4 E}{1 - \mu^2} z w_0 \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{3 x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3 y^2}{b^2} - 1 \right) \right] \quad (1003)$$

$$\sigma_y = - \frac{4 E}{1 - \mu^2} z w_0 \left[\frac{1}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3 y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{a^2} \left(\frac{3 x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right] \quad (1004)$$

$$\tau_{xz} = - 2 G z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{16 G w_0}{a^2 b^2} x y z \quad (1005)$$

W punktach płyty, położonych wzdłuż osi OX i OY t. j. przy $x = 0$ lub $y = 0$, naprężenie $\tau_{xz} = 0$, skąd wynika, że naprężenia główne równają się w tym wypadku odpowiednio naprężeniom σ_x i σ_y .

Na końcach półosi t. j. przy $x = 0$, $y = b$ lub przy $x = a$, $y = 0$ naprężenia obliczone ze wzorów (1003) i (1004) równają się odpowiednio:

$$\sigma_x = - \frac{8 \mu E z w_0}{1 - \mu^2} \cdot \frac{1}{b^2} \quad \sigma_y = - \frac{8 E z w_0}{1 - \mu^2} \cdot \frac{1}{b^2} \quad (1006)$$

$$\sigma_x = - \frac{8 E z w_0}{1 - \mu^2} \cdot \frac{1}{a^2} \quad \sigma_y = - \frac{8 \mu E z w_0}{1 - \mu^2} \cdot \frac{1}{a^2} \quad (1007)$$

O ile $a > b$, to największe normalne naprężenie na końcu małej osi płyty eliptycznej wynosi (wyciąganie u góry):

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{6 q}{h^2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{b^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{3b^2}{a^4}} \quad (1008)$$

Napężenie to może być uważane za miarodajne przy obliczeniu płyt o niezmienniej grubości. W razie płyty kolistej (t. j. przy $a = b = r$) napężenie w miejscu utwierdzenia wynosi na podstawie wzoru (1008):

$$\sigma_{\max} = \sigma_u = \pm \frac{3}{4} \cdot \frac{qr^2}{h^2} \quad (1009)$$

W środku płyty napężenie równa się w tym wypadku:

$$\sigma_0 = \pm \frac{3qr^2(1 + \mu)}{8h^2} \quad (1010)$$

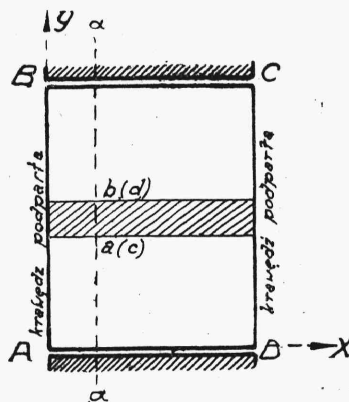
zaś odpowiednie ugięcie wynosi:

$$w_0 = w_{\max} = \frac{3}{16} \cdot \frac{qr^4(1 - \mu^2)}{Eh^3} \quad (1011)$$

3. Płyty prostokątne.

Bierzemy płytę prostokątną (rys. 457) równomiernie obciążoną, podpartą lub utwierdzoną wzdłuż krawędzi AB i CD , zaś wzdłuż krawędzi BC i AD swobodną. Przypuśćmy, że w kierunku osi OY płyta nie może się wydłużać, skąd $\varepsilon_y = 0$ i $v = 0$. Jest to wypadek tak zwanego cylindrycznego wygięcia płyty. W związku z tem z równania (958) mamy, że $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, a równanie (990) odkształconej powierzchni środkowej płyty przybiera postać następującą:

$$\frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (1012)$$



Rys. 457.

Równanie różniczkowe osi odkształconej belki o szerokości 1 mogłoby zostać przedstawione pod następującą postacią (por. rozdz. XI,8):

$$\frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (1013)$$