

Równaniu (793) nadajemy formę następującą:

$$\Delta(V - T) = 0 \quad (794)$$

Z równania tego wynika, że równowadze układu odpowiada największa lub najmniejsza wartość różnicy zawartej w tem równaniu w nawias. Jeżeli różnica $V - T = U$ (całkowita energia danego układu) jest funkcją pewnych zmiennych A_i , wówczas równanie (794) może być zastąpione przez równania typu:

$$\frac{\partial U}{\partial A_i} = 0 \quad (795)$$

wyrażające warunek maximum lub minimum (extremum).

Wyrzekamy się tu niejako założenia 1^o z rozdz. I,5.

8. Przybliżony sposób wyznaczenia ugięć metodą Ritz'a i Timoszenki.

Równanie (795) może być wyzyskane do przybliżonego obliczenia odkształceń prętów zginanych. Zadanie sprowadza się do wybrania takiej krzywej dla osi odkształconej, aby obliczone w zależności od jej rzędnych wielkości V i ΣPy czyniły zadość równaniu (795) lub, inaczej mówiąc, aby odpowiadały maximum lub minimum funkcji

$$U = V - T \quad (796)$$

W tym celu a priori zakładamy formę odkształconej w postaci równania krzywej o szeregu niewiadomych parametrów, odpowiadającą jednak warunkom brzegowym t. j. posiadającą np. zerowe ugięcia i przegięcia w tych samych punktach, w których je mieć musi ściśle wyznaczona odkształcona pręta.

Niech to więc będzie krzywa odpowiadająca równaniu:

$$y = F(x, A_1, A_2 \dots) \quad (797)$$

Aby rzędne tej krzywej odpowiadały maximum lub minimum funkcji U , wyznaczamy parametry A_i w ten sposób, aby czyniły one zadość równaniom:

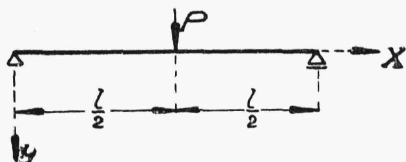
$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial A_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial A_n} = 0 \quad (798)$$

Powyższa metoda postępowania została opracowana przez W. Ritz'a i S. Timoszenkę¹⁾, który wykazał, że dla całego szeregu zagadnień technicznych ścisłość uzyskanych tą drogą rezultatów jest całkowicie wystarczająca.

Dla przykładu obliczamy (w punkcie zaczepienia siły) ugięcie belki na dwóch podporach, obciążonej pośrodku siłą P (rys. 406).

Dla odkształconej belki zakładamy równanie następujące:

$$y = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (799)$$



Rys. 406.

Krzywa (799) odpowiada warunkom brzegowym zadania (rys. 406), gdyż w punktach $x = 0$ i $x = l$ rzędna y oraz druga pochodna y'' , proporcjonalna do momentu zginającego, równe są zeru, zaś pierwsza pochodna y' równa kątowi nachylenia przekroju końcowego belki (ściślej tangensowi tego kąta) nie jest równa zeru.

Dla przyjętej odkształconej obliczamy funkcję U :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^l (EJ y'')^2 \frac{dx}{2EJ} = \\ &= \frac{EJ}{2} \int_0^l A_1^2 \cdot \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} \cdot dx = \\ &= \frac{EJ}{4} A_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right) dx = \frac{EJ \pi^4}{4l^3} \cdot A_1^2 \\ I &= \Sigma Py = P \cdot A_1 \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = P \cdot A_1 \\ U &= \frac{EJ \pi^4}{4l^3} \cdot A_1^2 - PA_1 \quad (800) \end{aligned}$$

¹⁾ S. Timoszenko, „Normalnyje koordynaty...” Izwiestja Kiewskiego Polit. Inst. 1910.
W. Ritz „Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variationsprobleme der mathematischen Physik“. (Journal f. reine und angewandte Mathematik, 135).

Bierzemy w dalszym ciągu pochodną U względem A_1 , otrzymując:

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = \frac{EJ \pi^4}{4l^3} \cdot 2 A_1 - P = 0 \quad (801)$$

skąd wyznaczamy A_1 :

$$A_1 = \frac{Pl^3}{EJ \cdot \frac{\pi^4}{2}} = \frac{Pl^3}{48,7 EJ}$$

Ponieważ, przy $x = \frac{l}{2}$, mamy z równania (799), że $y = A_1$, więc:

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{48,7 EJ} \quad (802)$$

podczas gdy ściśle obliczenie daje rezultat $y_{\max} = \frac{Pl^3}{48 EJ}$, różniący się od poprzedniego zaledwie o 1,5% (por. rozdz. VII,5),

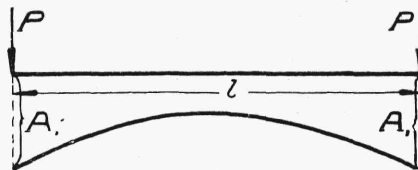
Dla większej ściśłości wyników można byłoby w równaniu sinusoidy

$$y = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3 \pi x}{l} + \dots$$

przyjąć więcej wyrazów ponad jeden, przyjęty we wzorze (799).

Wyłożona metoda może być również zastosowana i do obliczenia belek na sprężystym podłożu, gdyż z jednej strony ściśle rozwiązanie takich zagadnień natrafia na znaczne trudności, z drugiej zaś zagadnienia tego rodzaju powstają zwykle w związku z obliczeniem fundamentów, gdzie nie podobna żądać znaczniejszej ściśłości w obliczeniach.

Rozwiązujemy tu zadanie przedstawione na rys. 407 i omówione pod 2° w rozdz. XI,8. Mamy tu, mianowicie, obliczyć dno suchego doku wyginane ku górze i obciążone pionowo ścianami doku. Rozpatrujemy zagadnienie, jako zadanie belki, leżącej na podłożu sprężystym i obciążonej w końcach siłami pionowymi. Dla



Rys. 407.

osi odkształconej bierzemy tu wzór następujący:

$$y = A_1 - A_2 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (803)$$

Przy $x = 0$ i $x = l$ mamy, że $y = A_1$. Dla energii sprężystej samej belki otrzymujemy (por. wzór 800), że:

$$V = \frac{EJ \pi^4}{4 l^3} \cdot A_2^2 \quad (804)$$

Reakcje podłoża sprężystego są wprowadzane siłami zewnętrznymi względem belki, wzrastają jednak w sposób ciągły na podobieństwo sił wewnętrznych (por. koniec § 7).

Ponieważ reakcja podłoża wynosi na jednostkę długości ky (por. rozdz. XI, 8), to na odcinku nieskończenie małym dx równa się ona $kydx$, a praca jej na długości całej belki wynosi:

$$T_2 = \int_0^l ky dx \cdot \frac{y}{2} = \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx \quad (805)$$

Wstawiając tu zamiast y wartość jego z równania (803), otrzymujemy że

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{k}{2} \int_0^l (A_1 - A_2 \sin \frac{\pi x}{l})^2 dx = \\ &= \frac{k}{2} \int_0^l (A_1^2 + A_2^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} - 2A_1 A_2 \sin \frac{\pi x}{l}) dx = \\ &= \frac{kl}{2} (A_1^2 + \frac{A_2^2}{2} - \frac{4A_1 A_2}{\pi}) \end{aligned} \quad (806)$$

Praca sił zewnętrznych (wraz z reakcjami podłoża) w danym razie równa się więc:

$$T = \Sigma Py - T_2 = 2P \cdot A_1 - \frac{kl}{2} (A_1^2 + \frac{A_2^2}{2} - \frac{4A_1 A_2}{\pi})$$

Ostatecznie otrzymujemy następujący wzór dla U :

$$U = \frac{EJ \pi^4}{4 l^3} A_2^2 - 2PA_1 + \frac{kl}{2} (A_1^2 + \frac{A_2^2}{2} - \frac{4A_1 A_2}{\pi}) \quad (807)$$

Ustawiamy równania $\frac{\partial U}{\partial A_1} = 0$ i $\frac{\partial U}{\partial A_2} = 0$. Mamy, mianowicie, że

$$\frac{kl}{2} \cdot 2 A_1 - \frac{kl}{2} \cdot \frac{4 A_2}{\pi} - 2P = 0 \quad (808)$$

$$\frac{EJ \pi^4}{4 l^3} \cdot 2 A_2 + \frac{kl}{2} \cdot \frac{2 A_2}{2} - \frac{kl}{2} \cdot \frac{4 A_1}{\pi} = 0 \quad (808')$$

skąd otrzymujemy, że

$$A_2 = \frac{P}{\frac{EJ \pi^4}{2 l^3} + kl \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)}$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{EJ \pi^4}{4 kl^4} \right) \frac{P}{\frac{EJ \pi^4}{2 l^3} + kl \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)} \quad (809)$$

W razie, gdy nie mamy możności porównać wzorów przybliżonych ze ścisłymi, ścisłość obliczenia zwiększamy przez zwiększenie liczby parametrów dotąd, dopóki dwa sąsiednie wyniki nie są dostatecznie bliskie sobie.