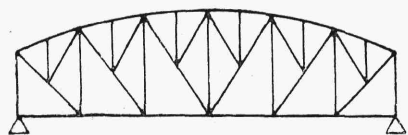
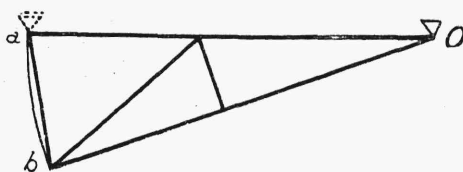


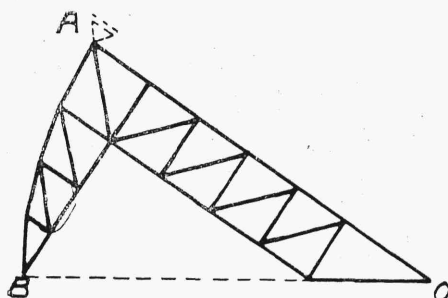
po jednej podporze, której reakcja musi się równoważyć z parciem wody na jaz.



Rys. 360.



Rys. 361.



Rys. 362.

4. Linje wpływowe kratownic statycznie wyznaczalnych w dwóch punktach podpartych.¹⁾

Punktem wyjścia do obliczenia linii wpływowych dla kratownic są linje wpływowe dla układów pełnych.

Bierzemy kratownicę z rys. 363 o kracie trójkątnej bezsłupowej, o pasach zakrzywionych i jeździe górnej.

Aby obliczyć siłę podłużną w pręcie ab przeprowadzamy przekrój $\alpha_1\alpha_1$, odrzucamy część kraty, zawartej między tym przekrojem a podporą B , i uciekamy się w dalszym ciągu do metody Ritter'a. Aby lewa część kraty pozostała w równowadze, zastępujemy działanie odrzuconej części przez siły G , D i K , skierowane według rysunku 363b. Siły G , D , K , A utrzymują lewą część kraty w równowadze, o ile ciężar $1t$ pozostaje na prawej stronie kraty. W przeciwnym razie musimy tu uwzględnić i bezpośrednio działanie tego ciężaru.

W kratownicach mamy do czynienia z obciążeniem węzłowym, gdyż ciężary skupione przesuwały się po belkach podłużnych, które opierają się na węzły za pośrednictwem belek poprzecznych.

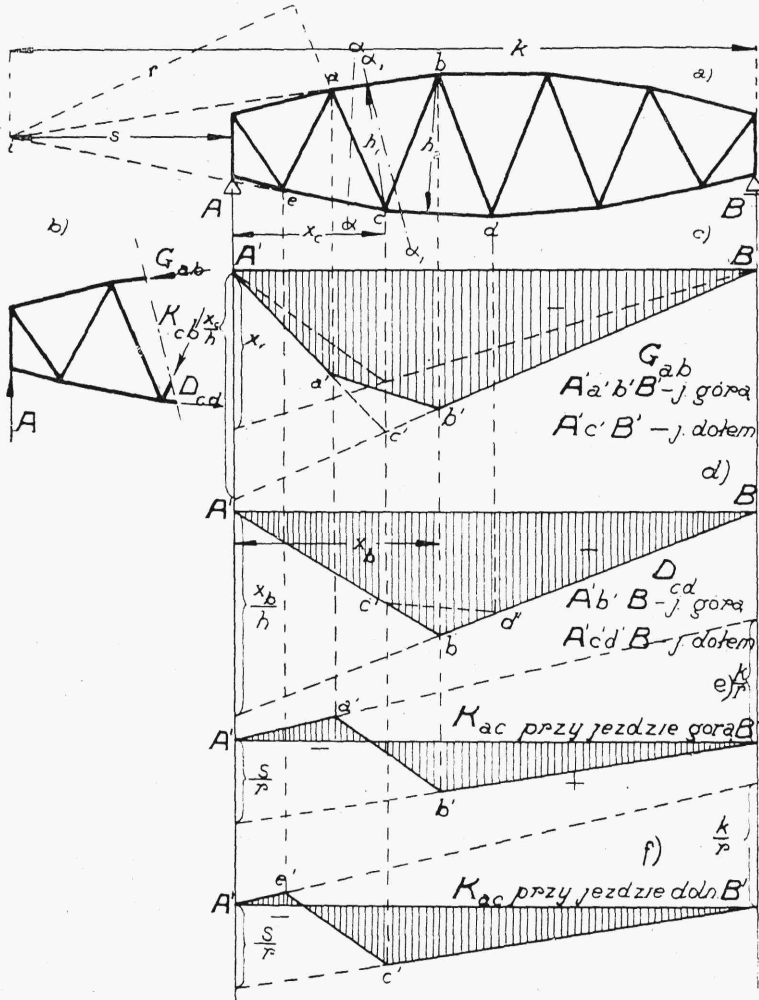
¹⁾ Już w czasie druku niniejszego podręcznika ukazała się obszerna praca z tego zakresu prof. dr. inż. S. Kunickiego p.t. „Linje wpływowe”, 1928. Nakład Kom. Wyd. St. Pol. Warsz. (lit.).

Bierzemy sumę momentów względem punktu c . Ponieważ siły D i K przechodzą przez c , mamy więc dla lewej części kraty, że

$$M_c - Gh_1 = 0$$

skąd

$$G = \frac{M_c}{h_1} \quad (629)$$



Rys. 363.

gdzie M_c oznacza moment sił zewnętrznych wzięty względem punktu c a h_1 odległość punktu c od pręta ab (vid. § 2).

Ponieważ moment M_c w danej odległości od podpory jest w układzie statycznie wyznaczalnym ten sam, niezależnie od tego, czy belka jest pełna, czy kratowa, więc linia wpływowa, wyprowadzona dla momentu zginającego w dowolnym przekroju belki pełnej, znajduje i tu zastosowanie.

Wykreślamy więc linię wpływową dla momentu w przekroju poprzecznym belki kratowej, przechodzącym przez węzeł c (rys. 363c). Wszystkie rzędne linji tej dzielimy w myśl równania (629) przez h_1 , dzięki czemu otrzymujemy linię wpływową dla G . Na przestrzeni między węzłami a i b linia wpływowa musi mieć kształt prostej (por. rozdz. IV, 7),

dlatego też rzutujemy te węzły na linię wpływową $\frac{M_c}{h_1}$ i rzuty ich a' i b'

łączymy prostą według rysunku 363c. Ponieważ siłę G nadaliśmy już właściwy kierunek, będziemy dla G otrzymywali ze wzoru (629) wielkości dodatnie. Zgodnie z rys. 363 górny pas kratownicy będzie wszędzie ściskany.

Do obliczenia linji wpływowej dla cd przeprowadzamy przekrój $\alpha_1\alpha_1$ i, rozumując jak wyżej, bierzemy momenty względem węzła b , przyczem h_2 będzie odległością punktu b od pręta cd .

Otrzymujemy, że

$$M_b - Dh_2 = 0$$

skąd

$$D = \frac{M_b}{h_2} \quad (630)$$

Odpowiednia linia wpływowa przedstawiona jest na rys. 363d. Pręty pasa dolnego będą wyciągane.

Aby obliczyć siłę osiową w pręcie ac , robimy przekrój xx i przedłużamy ec i ab do przecięcia się w punkcie i , zwanym punktem Ritter'a (oddalonym o s od podpory A). Bierzemy momenty sił, działających na lewą część kraty $\alpha A\alpha$ względem tego punktu. Mamy tu dla K_{ac} , że

$$Kr - As = 0 \quad (631)$$

gdyż siły, działające wzdłuż ab i ec , dają względem punktu i momenty równe 0. Z równania (631) otrzymujemy:

$$K = \frac{As}{r} = \frac{\eta_A \cdot s}{r} = \frac{l-x}{l} \cdot \frac{s}{r} \quad (632)$$

O ile więc ciężar 1 stoi na prawo od węzła c , wówczas linia K ma kształt linji wpływowej dla A , zmienionej w stosunku $\frac{s}{r}$ (według rys. 363e).

Gdy ciężar 1 znajduje się między A i a , wówczas:

$$K = \frac{As}{r} - \frac{1(s+x)}{r} = \frac{l-x}{l} \cdot \frac{s}{r} - \frac{s+x}{r} = -\frac{x(s+l)}{rl} \quad (633)$$

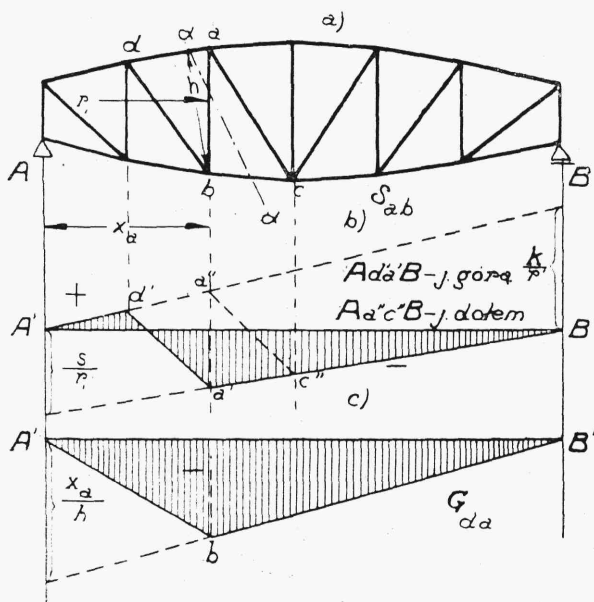
Odpowiada to prostej, dającej na prawej podporze rzędną:

$$\eta_D = -\frac{s+l}{r} = -\frac{k}{r}$$

Między a i b , jako między dwoma punktami węzłowymi, linja wpływowa zmienia się według prostej $a'b'$.

Na rys. 363f przedstawiona jest linja wpływowa dla tego samego krzyżulca ac przy jeździe dolnej.

Gdybyśmy zamiast kraty bezsłupowej mieli kratę ze słupami np. według rys. 364, wówczas linje wpływowe dla pasów i krzyżulców obli-



Rys. 364.

czalibyśmy w ten sam sposób, jak w tym samym wypadku. Linje wpływowe dla pasów będą tu miały kształt trójkątów (rys. 364c).

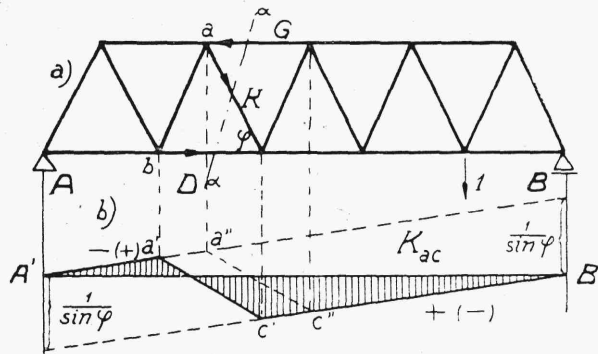
Wyznaczenie linii wpływowej dla słupa odbywa się w sposób podobny, jak to było robione wyżej dla krzyżulca. W tym celu robimy przekrój aa przez słup ab i znajdujemy punkt Ritter'a i (na rysunku niewidoczny), poczem z równania momentów względem tego punktu otrzymujemy:

$$S = \frac{As}{r_1} - \frac{l \cdot (s+x)}{r_1}$$

gdzie r_1 oznacza odległość słupa od punktu przecięcia się pasów da i bc . Przy jeździe górnej linia wpływowa ma tu kształt czworoboku $A'd'a'B'$ (rys. 363b). Przy jeździe dolnej otrzymalibyśmy na podstawie rozważań analogicznych linie wpływową przedstawioną na rys. 363b zapomocą czworoboku $A'a''c''B'$. Linia ta różni się od poprzedniej dlatego, że tu przejście ciężaru l z lewej części kraty (t. j. położonej na lewo od przekroju aa) na prawą odbywa się między węzłami b i c , podczas gdy w tamtym wypadku przejście to miało miejsce między węzłami d i a .

W razie gdy krata ma pasy proste i równoległe (rys. 365), linie wpływowe dla sił G i D (w pasach) otrzymujemy, jak w wypadku poprzednim. Linia wpływowa dla słupa będzie tu identyczna z linia wpływową dla sił poprzecznych przy obciążeniu węzłowem, co otrzymujemy, robiąc przekrój przez słup i ustawiając równanie $\Sigma Y = 0$ dla jednej z rozciętych części kratownicy. Linie wpływową dla krzyżulca ac wykreślamy na podstawie wzoru:

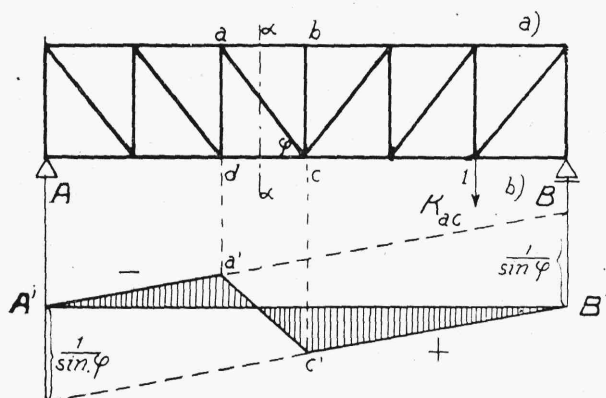
$$K = \frac{T}{\sin \varphi} \quad (634)$$



Rys. 365.

(gdzie T jest to siła poprzeczna w przekroju aa), który wynika z równania $\Sigma Y = 0$, zastosowanego do lewej części kratownicy.

Rys. 365b przedstawia linię wpływową dla krzyżulca w kracie równoramiennej ($A'a'e'B'$ dla jazdy dolnej, $A'a''e''B'$ dla jazdy górnej), a rys. 366b linię wpływową dla krzyżulca w kracie ze słupami. W tym ostatnim wypadku kształt linii wpływowej nie zależy od rodzaju jazdy.



Rys. 366.

Ustalenie znaków dla linii wpływowych odbywa się naogół drogą następującego rozumowania. Przypuśćmy, że chodzi o krzyżulec ac (rys. 366). Robimy przekrój aa . O ile ciężar stoi nad węzłem b lub na prawo od niego, siła poprzeczna w przekroju aa , równa reakcji A , skierowana jest ku górze i dąży do przesunięcia w górę lewej (od przekroju aa) części kraty. Sprzeciwia się temu siła w krzyżulcu ac , który musi być więc wyciągany. Wynika z tego, że prawa część linii wpływowej będzie odpowiadała wyciąganiu, czyli będzie posiadała znak $+$, wobec czego lewa część linii będzie miała znak $-$. Drogą analogicznego rozważania dochodzimy do tego, że lewa część linii wpływowej dla słupa ad będzie dodatnia, prawa ujemna.

Kratownicę półkrzyżulcową obliczamy, łącząc metodę momentów z metodą zrównoważenia węzłów (rys. 367).

Robimy przedewszystkiem przekrój zakrzywiony aa i ustawiamy równanie momentów sił, działających na lewą część belki, względem punktu b . Znajdujemy tą drogą, że

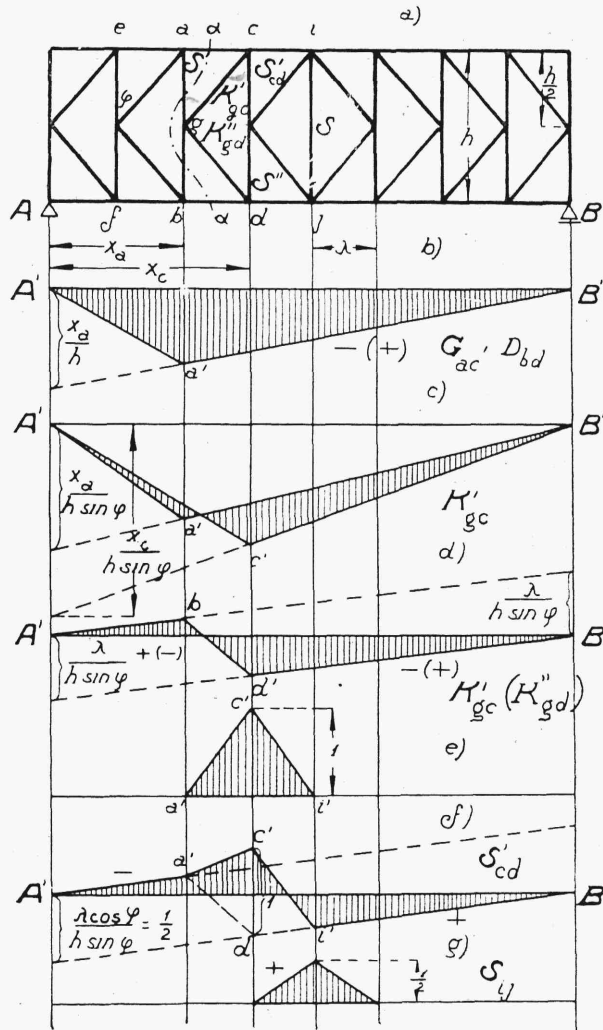
$$M_b + G_{ac} \cdot h = 0$$

skąd

$$G_{ac} = - \frac{M_b}{h} \quad (635)$$

gdzie G_{ac} oznacza siłę działającą w przęcie ac pasa, zaś M_b moment zginający. W ten sam sposób obliczamy siłę w przęcie bd dolnego pasa:

$$D_{bd} = \frac{M_a}{h} \quad (636)$$



Rys. 367.

Ponieważ $M_a = M_b$ więc mamy, że $G_{ac} = -D_{bd}$ i że linje wpływowe obydwóch sił mają kształt linji wpływowej momentu o rzędnych podzielonych przez h (rys. 367b).

Drogą rzutowania sił, działających na węzeł g , na oś poziomą dojdziemy na podstawie warunków równowagi węzła, do równania:

$$\Sigma X = K'_{gc} \sin \varphi + K''_{gd} \sin \varphi = 0 \quad (637)$$

skąd wynika, że $K'_{gc} = -K''_{gd}$. Zależność (637) ma jednak tylko miejsce w tym wypadku, gdy oba półkrzyżulce są jednakowo nachylone względem słupów.

Siłę w półkrzyżulcu gc znajdujemy z warunków równowagi węzła c , rzutując siły działające na ten węzeł, na kierunek pasów. Mamy tu:

$$K'_{gc} \sin \varphi + G_{ac} - G_{ci} = 0 \quad (638)$$

Dla półkrzyżulca K''_{gd} odpowiednio otrzymujemy (dla węzła d):

$$K''_{gd} \sin \varphi + D_{bd} - D_{dj} = 0 \quad (638')$$

Wzorowi (638) możemy nadać postać następującą:

$$\begin{aligned} K'_{gc} &= \frac{1}{h \sin \varphi} (M_d - M_b) = \\ &= \frac{1}{h \sin \varphi} (x_c - x_a) = \frac{\lambda}{h \sin \varphi} \end{aligned} \quad (639)$$

Rzędne linii wpływowej K'_{gc} są więc różnicą rzędnych linii wpływowych M_d i M_b podzieloną przez $h \sin \varphi$ (rys. 367c). Rys. 367d zawiera tę samą linię wpływową po odniesieniu jej rzędnych do jednej prostej. Linja przedstawiona na rys. 367d służy również i dla półkrzyżulca K''_{gd} , należy jednak tu brać pod uwagę znaki zawarte w nawiasy.

Linja wpływowa dla górnej części słupa cd przy jeździe górnej i ciężarze, znajdującym się poza obrębem przedziałów ac i ci będzie miała następujące równanie, jako rezultat rzutowania na oś pionową sił, działających na węzeł c :

$$K'_{gc} \cos \varphi + S'_{cd} = 0 \quad (640)$$

i następujące przy ciężarze 1, znajdującym się w obrębie wymienionych przedziałów ac i ci (P oznacza część siły 1, przypadającą na węzeł c):

$$K'_{gc} \cos \varphi + S'_{cd} - P = 0 \quad (641)$$

Linia wpływu ciężaru I na siłę w słupie cd ma kształt trójkąta przedstawionego na rys. 367e. Mając to na uwadze, możemy znaleźć linię wpływową dla słupa cd . Poza obrębem przedziałów ac i ci rzędne tej linii będą równe odpowiednim rzędnym linii wpływowej dla krzyżulca K'_{sc} przedziału ac , pomnożonym przez $\cos \varphi$ i wziętym z odwrotnym znakiem. W danym szczególnym wypadku kratownicy o pasach równoległych $\lambda = \frac{h}{2} \tan \varphi$,

a więc rzędna końcowa $\frac{\lambda \cos \varphi}{h \sin \varphi}$ równa się $\frac{1}{2}$. Na przestrzeni przeseł ac i ci należy do rzędnych tych dorzucić jeszcze rzędne linii wpływu ciężaru I. Tą drogą otrzymujemy linię wpływową przedstawioną na rys. 367f dla górnej części słupa cd .

W razie jazdy dolnej linia wpływowa górnej części słupa cd będzie miała kształt linii odpowiedniego półkrzyżulca o rzędnych pomnożonych przez $\cos \varphi$, bez dodatkowego trójkąta $a'c'i'$ (t.j. linii $A'a'd'i'B'$).

W razie gdyby pasy dźwigara półkrzyżulcowego nie były do siebie równoległe, lecz zakrzywione, wyznaczenie odpowiednich linii wpływowych odbywałoby się tą samą drogą, co poprzednio, tylko wzory (638) — (640) zawierałyby kąty nachylenia pasów względem prostej łączącej podpory (poziomej).

Linję wpływową dla środkowego słupa kratownicy przy jeździe dolnej otrzymamy drogą rzutowania na płaszczyznę pionową sił P , S_{ij} oraz K''_l i K''_p , zbiegających się w środkowym węźle dolnym j :

$$K''_l \cos \varphi + K''_p \cos \varphi + S_{ij} = P \quad (642)$$

Robimy przez kratę dwa przekroje II i III na lewo i na prawo od środkowego słupa i znajdujemy sumy rzutów na oś OY sił, działających na lewą część kratownicy.

Ponieważ

$$K'_l = -K''_l \quad \text{i} \quad K'_p = -K''_p$$

więc mamy, że

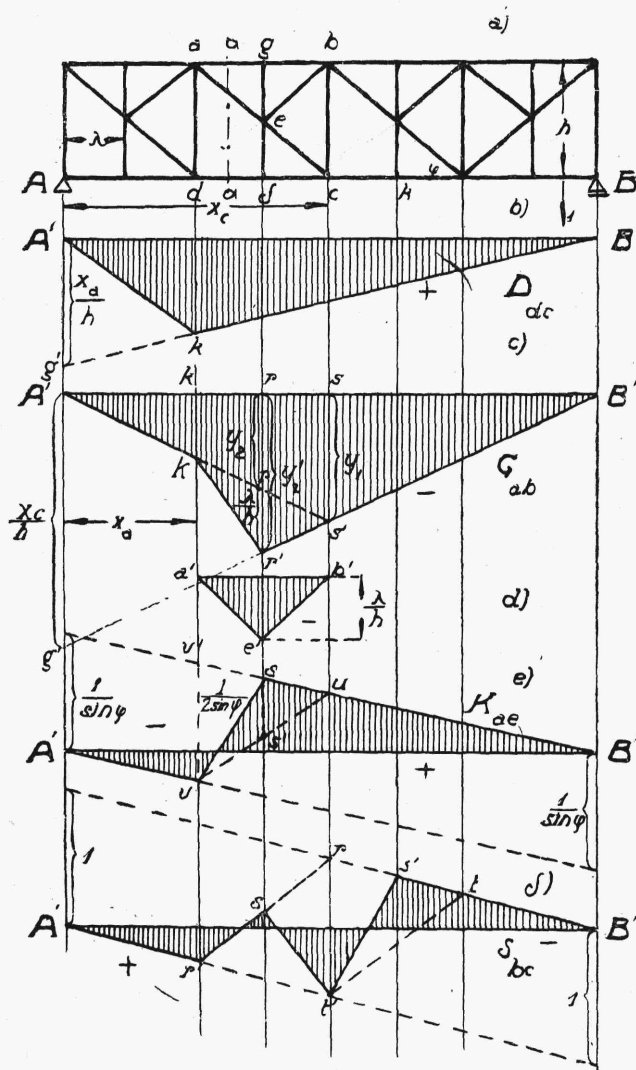
$$\begin{aligned} 2K''_l \cos \varphi - A &= 0 \\ 2K''_p \cos \varphi - 1 + A &= 0 \end{aligned} \quad (643)$$

Stąd wynika (por. wzór 642), że przy $P = 1$,

$$K''_l \cos \varphi + K''_p \cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \quad (644)$$

Odpowiednia linia wpływowa przedstawiona jest na rys. 367g.

Kratownice z drugorzędem zawieszeniem są to kratownice, w których działanie ciężarów na części pasa dolnego między głównymi węzłami, przekazuje się zapomocą dodatkowych połączeń bezpośrednio na pas górny.



Rys. 368.

W kratownicy przedstawionej na rys. 368 w przedziale dc działanie ciężaru przenosi się na pas górny zapomocą połączenia gf i eb . Linje wpływowe dla sił w dolnym pasie opisanej kratownicy nie różnią się od odpowiednich linii dla kratownicy bez zawieszenia drugorzędowego. Mo-

żemy się o tem przekonać, przeprowadzając przekrój az i ustawiając równanie momentów względem punktu a .

Linja wpływowa dla siły w przedziale ab górnego pasa kratownicy, w razie gdyby zawieszenia dodatkowego nie było, miałaby kształt przedstawiony na rys. 368c za pomocą linii $A's'B'$.

Z drugiej strony, pręt ab jest częścią składową dźwigara abe , podpartego w punktach a i b i obciążonego w punkcie e za pośrednictwem wiszaka ef . Linja wpływowa dla ab , jako części składowej zawieszenia dodatkowego, będzie miała kształt przedstawiony na rys. 368d.

Środkowa rzędna linii wpływowej dla pasa górnego zawieszenia drugorzędnego abe równa się $\frac{\lambda}{h}$, gdyż rzędna, odpowiadająca pionowi ad , równa tu się $\lambda: \frac{1}{2}h$.

Połączenie linii wpływowych z rysunków 368c ($A's'B'$) i 368d da nam właściwy kształt linii wpływowej dla pręta ab na rys. 368e (linja $A'k'r's'B'$). Punkt r' leży na przedłużeniu linii $B's'$, ograniczającej linję wpływową momentu w kratownicy bez zawieszenia drugorzędnego. Aby to udowodnić, obliczamy rzędne linii wpływowej $\overline{ss'} = y_1$, $\overline{rr'} = y'_2$ i $\overline{rr''} = y_2$. Z podobieństwa trójkątów $A'g'B'$ oraz $sB's'$ mamy że:

$$y_1 = \frac{x_c}{h} \cdot \frac{(l - x_c)}{l} \quad (645)$$

Z podobieństwa trójkątów $A'g'B'$ i $rB'r'$ otrzymujemy:

$$y'_2 = \frac{x_c}{h} \cdot \frac{(l - x_c)}{l} \cdot \frac{l - x_c + \lambda}{l - x_c} \quad (646)$$

Wreszcie z podobieństwa trójkątów $rA'r''$ i $sA's'$ wynika, że:

$$y_2 = \frac{x_c}{h} \cdot \frac{l - x_c}{l} \cdot \frac{x_c - \lambda}{x_c} \quad (646')$$

Odejmując od rzędnej y'_2 rzędną y_2 , otrzymujemy:

$$y'_2 - y_2 = \frac{\lambda}{h} \quad (647)$$

Wynika z tego, że punkt r' istotnie leżeć musi na przedłużeniu prostej $B's'$.

Linia wpływowa dla dolnej części krzyżulca ac ma kształt $A'vuB'$, przedstawiony na rys. 368e t. j. taki, jakiby miała linia wpływowa całego krzyżulca, gdyby nie było drugorzędnego zawieszenia. Aby otrzymać linję wpływową dla górnej części tegoż krzyżulca, dodajemy tu rzędnę linji wpływowej dla krzyżulca ac zawieszenia drugorzędnego, przedstawionej za pomocą trójkąta vsu . Linję vsu otrzymujemy na tej zasadzie, iż rzędna tej linji wpływowej nad podporą a drugorzędnego zawieszenia powinna odpowiadać $\frac{1}{\sin \varphi}$, jak dla zwyczajnej kratownicy krzyżulcowej. Droga do-

dawania do siebie rzędnych linij $A'vuB'$ i vsu znajdujemy linję $A'vsB'$ dla krzyżulca K_{ac} . W sposób analogiczny do poprzedniego można uzasadnić, iż punkt s linji wpływowej leży na przedłużeniu linji uB' .

Aby otrzymać linję wpływową dla słupa bc , wykreślamy linję wpływową dla tegoż słupa przy jeździe górnej ($A'r'rB'$) i dolnej ($A'ttB'$) w założeniu, że drugorzędnego zawieszenia nie ma. Wobec tego, że przeniesienie działania ciężarów z dolnego pasa na górny odbywa się w danym wypadku w granicach między dwoma zawieszeniami (węzły f i k), muszą więc obie powyższe linje wpływowe łączyć się ze sobą na tej przestrzeni prostemi i dlatego otrzymujemy na linji wpływowej, zamiast prostych rr' i tt' , proste st' i $s't'$. Odpowiednia linja wpływowa przedstawiona jest na rys. 368f.

Linję tę moglibyśmy otrzymać również i z warunków równowagi węzła c .

5. Odkształcenie kratownic.

Odkształcenie kratownicy przegubowej polega na wydłużeniu się lub skróceniu jej poszczególnych prętów i na związanem z tem przesunięciu się węzłów i zmianą kątów między prętami.

Oznaczmy przez i oraz j dwa dowolne węzły kratownicy statycznie wyznaczalnej a przez l_{ij} odległość między nimi w stanie nieodkształconym.

Analityczny sposób obliczenia przesunięć wynika bezpośrednio z równania:

$$l_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \quad (648)$$

wyrażającego zależność między długością pręta a współrzędnymi jego końców. Zależność między przyrostem długości pręta a przyrostami jego współrzędnych otrzymujemy więc ze wzoru następującego:

$$\begin{aligned} l_{ij} \Delta l_{ij} = & (x_i - x_j) \Delta x_i - (x_i - x_j) \Delta x_j + \\ & + (y_i - y_j) \Delta y_i - (y_i - y_j) \Delta y_j \end{aligned} \quad (649)$$