

Przybiera ono np. dla B' postać:

$$M_{B'}' + M_{B'}'' = M_{B'}$$

a dla węzła C' postać następującą:

$$M_{C'}' + M_{C'}'' = M_{C'}$$

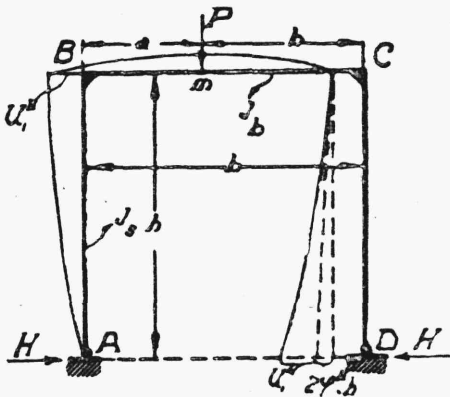
Przykład tego rodzaju obliczenia podany jest w paragrafie 7 o ramach wielopiętrowych ¹⁾.

Pozatem obliczenie to znajduje szerokie zastosowanie w przypadku kratownic o węzłach sztywnych (vid. rozdz. XV).

W dalszej konsekwencji przytoczony sposób rozumowania doprowadza do równania czterech momentów, omówionego w paragrafie 10.

4. Ramy prostokątne statycznie niewyznaczalne.

Przypuśćmy, że mamy ramę prostokątną przegubową $ABCD$ (rys. 262), obciążoną siłą skupioną, ustawioną według rysunku. Zastępujemy przegubową podporę D ramy przez podporę przegubowo-przesuną i zaczepiamy do tej ostatniej siłę H , równą poziomej składowej reakcji odrzuconej podpory przegubowej.



Rys. 262.

W ten sposób dochodzimy do ramy statycznie wyznaczalnej, dla której reakcje podpór łatwo możemy obliczyć na podstawie równań równowagi. Obliczamy dla tej ramy poziome przesunięcia punktu D ramy, raz pod działaniem zewnętrznej siły P , drugi raz pod działaniem siły H . W pierwszym wypadku mamy do czynienia z odkształceniem, przedstawionem na rys. 263, gdzie przewidziane jest nie tylko swobodne przesuwanie się podpory D , lecz również i podpory A . Fakt,

że podpora A pozostała nieprzesuną nie ma tu żadnego znaczenia, gdyż zamiast poziomego przesunięcia AA' punktu A od pierwotnego położenia A' ,

¹⁾ Por. np. A. Ostenfeld „Die Deformationsmethode“, Berlin 1926.

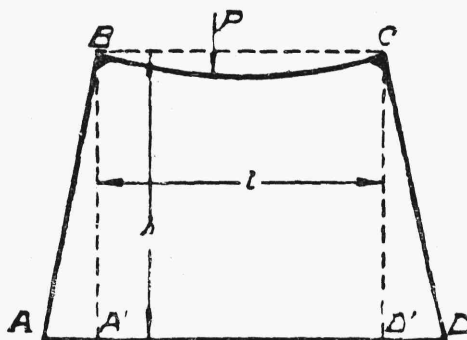
otrzymamy w takim razie poziome przesunięcie punktu A' od punktu A .

Będziemy w danym wypadku mieli, że:

$$AA' = h \operatorname{tg} \varphi_B^P = \approx h \varphi_B^P$$

$$DD' = h \operatorname{tg} \varphi_C^P = \approx h \varphi_C^P$$

gdzie φ_B^P i φ_C^P oznaczają obroty końcowych przekrojów belki BC , uważanej za belkę swobodnie podpartą. Dla kątów φ_B^P i φ_C^P otrzymujemy następujące wartości, obliczone według rozdz. VII,5 (wzory 347 i 348):



Rys. 263.

$$\varphi_B^P = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6lEJ_b}$$

$$\varphi_C^P = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6lEJ_b}$$

Całkowite poziome przesunięcie się podpory D pod działaniem sił P składa się więc z sumy odcinków AA' i DD' , czyli że wynosi

$$u_D^P = AA' + DD' = h (\varphi_B^P + \varphi_C^P) \quad (453)$$

Działanie sił H na ramę wyraża się w ten sposób, że siły te wywołują stały moment zginający $H \cdot h$ w belce BC , na słupy zaś działają, jako siły zaczepione do końców belek utwierdzonych. Poziome przesunięcie podpory D wyniesie w danym razie:

$$u_D^H = h(\varphi_B^H + \varphi_C^H) + 2y_D \quad (454)$$

gdzie y_D oznacza największe ugięcie się słupa ramy, jako belki utwierdzonej w jednym końcu (mianowicie w B lub C).

Na podstawie wzoru 245 (rodz. VII, 6) możemy napisać, że

$$\varphi_B^H = \varphi_C^H = \frac{1}{2} \cdot \frac{Hh}{EJ_b}$$

wobec czego wzór (454) przybiera postać następującą:

$$u_D^H = \frac{Hh^2l}{EJ_b} + \frac{2Hh^3}{3EJ_s} \quad (455)$$

gdzie J_b i J_s oznaczają odpowiednio momenty bezwładności belki poziomej i słupa ramy.

Ponieważ w punkcie D mamy w rzeczywistości podporę nieprzesuwną, więc oba wyznaczone wyżej przesunięcia u_D^P i u_D^H tej podpory muszą być równe sobie, co do wielkości bezwzględnej i różne, co do znaku, (czyli $u_D = u_D^P - u_D^H = 0$). Pozwala to nam na ustawienie równania, z którego wyznaczamy niewiadomą siłę H , jedyną statycznie niewyznaczalną wielkość zadania:

$$H = \frac{3Pab}{2hl(3 + 2k)} \quad (456)$$

gdzie $k = \frac{hJ_b}{lJ_s}$. We wzorze (456) nie jest uwzględniony wpływ sił po-
dłużnych, działających w poszczególnych prętach, na wielkości statycznie niewyznaczalne.

Moment zginający w słupach AB i CD wyraża się wzorem:

$$M_\alpha = H \cdot \alpha \quad (457)$$

gdzie α oznacza, jak wyżej, odległość danego przekroju $\alpha\alpha$ słupa ramy od przegubu (por. § 2).

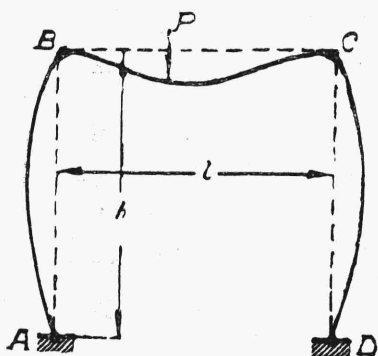
Moment zginający w belce BC otrzymujemy ze wzorów:

$$\begin{aligned} M_\alpha &= R_A \cdot \alpha - H \cdot h \\ M_\alpha &= R_A \cdot \alpha - H \cdot h - P(\alpha - a) \end{aligned} \quad (458)$$

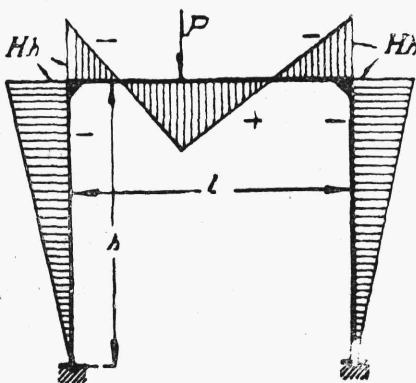
gdzie α oznacza odległość pewnego przekroju belki BC od końca B , zaś R_A reakcję pionową ramy w punkcie A .

Odkształcenia ramy obliczamy dla poszczególnych prętów, jako dla belek odpowiednio obciążonych, poczem dodajemy je do siebie, mając na uwadze niezmiennosć kątów ramy. Odkształcenie ramy $ABCD$ przedstawione jest w skażeniu na rys 264, zaś dodawanie odkształceń uwidocznione jest na rys. 262 i 263.

Wykres momentów zginających przedstawiony został na rys. 265.
Na słupy będą tu działały oprócz momentów jeszcze i siły podłużne



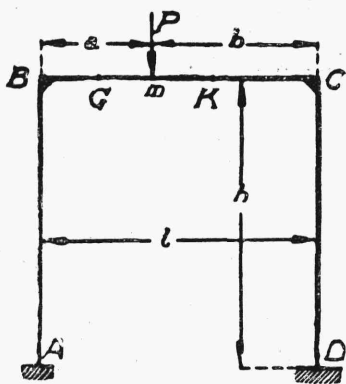
Rys. 264.



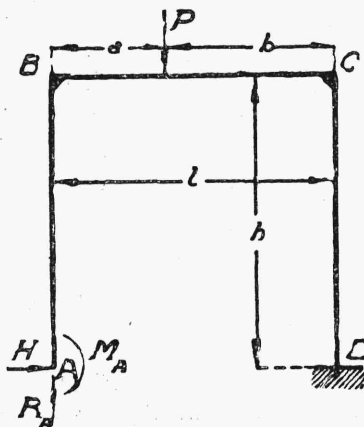
Rys. 265.

$N_{AB} = \frac{b}{l} \cdot P$ i $N_{DC} = \frac{a}{l} \cdot P$, których nie braliśmy pod uwagę przy obliczaniu odkształceń, które należy jednak uwzględnić przy obliczaniu naprężeń w ramie.

Na rys. 266 przedstawiona jest rama prostokątna bezprzegubowa. Ciężar skupiony P działa na poziomą część ramy w odległości a i b od słupów.



Rys. 266.



Rys. 267.

Odrzucamy podporę płaską w A i zaczepiamy tu siłę pionową R_A skierowaną ku górze, poziomą H (parcie poziome) skierowaną do wewnątrz ramy i moment M_A (rys. 267).

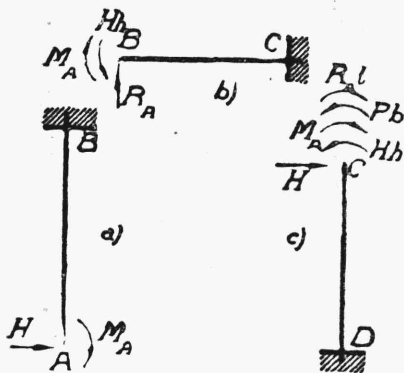
W obliczeniu pomijamy wpływ wydłużenia się prętów, składających ramę, na wartości R_A , M_A i H i rozpatrujemy każdy z prętów, jako belkę w jednym końcu swobodną, a na drugim utwierdzoną.

Na belki takie działają następujące siły i momenty (rys. 268):

na pręt AB siła H , moment M_A (rys 268a),

na pręt BC siły P i R_A , momenty M_A , Hh (rys. 268b),

na pręt CD siła H , momenty M_A , Hh , $R_A l$, Pb (rys 268c).



Rys. 268.

Obliczamy ugięcia i obroty końców poszczególnych części ramy w zależności od działających na nie sił i momentów. Za dodatnie kierunki obrotu będziemy przyjmowali kierunki na prawo, t.j. kierunki odpowiadające obrotowi końca A pręta AB pod działaniem momentu M_A . Za dodatnie przesunięcie poziome u_A przyjmujemy przesunięcie punktu A pod działaniem tegoż momentu M_A (rys. 268).

Obroty końców i ugięcia poszczególnych prętów ramy, zawarte

w dwóch następnych tablicach, dotyczą poszczególnych prętów, rozpatrywanych, jako belki utwierdzone w jednym końcu, i muszą być ze sobą we właściwy sposób zsumowane (vid. § 3, rys. 256, wielkości φ_i i y_i).

TABLICA I.

Momenty	Obroty końców (φ)		
	A	B	C
M_A	$\frac{M_A h}{EJ_s}$	$\frac{M_A l}{EJ_s}$	$\frac{M_A h}{EJ_s}$
Hh	—	$-\frac{Hhl}{EJ_b}$	$-\frac{Hh^2}{EJ_s}$
Pb	—	—	$-\frac{Pbh}{EJ_s}$
$R_A \cdot l$	—	—	$\frac{R_A lh}{EJ_s}$

TABLICA II.

Momenty	Ugięcia (y)		
	A	B	C
M_A	$\frac{M_A h^2}{2 EJ_s}$	$\frac{M_A l^2}{2 EJ_b}$	$-\frac{M_A h^2}{2 EJ_s}$
Hh	—	$-\frac{Hh l^2}{2 EJ_b}$	$\frac{Hh^3}{2 EJ_s}$
Pb	—	—	$-\frac{Pb h^2}{2 EJ_s}$
$R_A l$	—	—	$\frac{R_A l h^2}{2 EJ_s}$

Poza ugięciami i obrotami prętów, wywołanymi działaniem na ramę poszczególnych momentów, należy uwzględnić jeszcze obroty i ugięcia, wywołane przez bezpośrednie działanie sił R_A , H i P . A więc siła H wywołuje kąty obrotu końca (przekroju) A pręta AB i końca C pręta CD , równe każdy $+\frac{Hh^2}{2EJ_s}$, oraz poziome przesunięcia tych samych punktów (t.j. ugięcia prętów AB i CD w ich końcach), równe $-\frac{Hh^3}{3EJ_s}$.

Siły R_A i P wywołują łącznie obrót przekroju B pręta CB względem przekroju C o kąt równy:

$$\varphi_B^P = -\frac{(P - R_A)b^2}{2EJ_b} + \frac{R_A a^2}{2EJ_b} + \frac{R_A ab}{EJ_b}$$

i pionowe przesunięcie punktu B , wywołane ugięciem pręta BC i równe:

$$y_B^P = \frac{R_A a^3}{3EJ_b} + \frac{R_A ab^2}{2EJ_b} - \frac{(P - R_A)b^3}{3EJ_b} + a \left[-\frac{(P - R_A)b^2}{2EJ_b} + \frac{R_A ab}{EJ_b} \right]$$

gdzie wyraz pierwszy i drugi oznaczają ugięcie odcinka Bm , trzeci ugięcie odcinka mC , wreszcie czwarty i piąty pionowe przesunięcie punktu B , wywołane obrotem przekroju m (rys. 266).

Znając już obroty i przesunięcia poszczególnych punktów ramy, możemy, dodając je do siebie, wyznaczyć obrót przekroju i przesunięcia ramy w punkcie A . Ponieważ, w rzeczywistości, koniec A ramy jest utwierdzony, w punkcie A nie może więc nastąpić ani obrotu przekroju poprzecznego, ani też przesunięcia.

Wobec tego możemy ustawić trzy następujące równania:

$$\omega_A = 0 \quad u_A = 0 \quad v_A = 0 \quad (459)$$

gdzie ω_A , u_A i v_A oznaczają odpowiednio obrót i przesunięcia przekroju ramy w A . Na podstawie powyższych tablic obrotów i ugięć poszczególnych części ramy oraz wzorów 450 i 451, wypełniamy równania (459):

$$\begin{aligned} & \frac{M_A h}{EJ_s} + \frac{M_A l}{EJ_b} + \frac{M_A h}{EJ_s} - \frac{H h l}{EJ_b} - \frac{H h^2}{EJ_s} - \frac{P b h}{EJ_s} + \frac{R_A l h}{EJ_s} + \\ & + \frac{H h^2}{2EJ_s} - \frac{H h^2}{2EJ_s} - \frac{(P - R_A) b^2}{2EJ_b} + \frac{R_A a^2}{2EJ_b} + \frac{R_A a b}{EJ_b} = 0 \end{aligned} \quad (460)$$

$$\begin{aligned} & \frac{M_A h^2}{2EJ_s} + \frac{H h^3}{2EJ_s} - \frac{M_A h^2}{2EJ_s} - \frac{P b h^2}{EJ_s} + \frac{R_A l h^2}{2EJ_s} - \frac{H h^3}{3EJ_s} - \\ & - \frac{H h^3}{3EJ_s} + h \left(\frac{M_A l}{EJ_b} - \frac{H h l}{EJ_b} + \frac{M_A h}{EJ_s} - \frac{H h^2}{EJ_s} - \frac{P b h}{EJ_s} + \right. \\ & \left. + \frac{R_A l h}{EJ_s} + \frac{H h^2}{2EJ_s} \right) = 0 \end{aligned} \quad (461)$$

$$\begin{aligned} & l \left(\frac{M_A h}{EJ_s} - \frac{H h^2}{EJ_s} + \frac{H h^2}{2EJ_s} - \frac{P b h}{EJ_s} + \frac{R_A l h}{EJ_s} \right) + \frac{M_A l^2}{2EJ_b} - \\ & - \frac{H h l^2}{2EJ_b} + \frac{R_A a^3}{3EJ_b} - \frac{(P - R_A) b^3}{3EJ_b} - \frac{(P - R_A) b^2}{2EJ_b} \cdot a + \\ & + \frac{R_A a^2 b}{EJ_b} + \frac{R_A a b^2}{2EJ_b} = 0 \end{aligned} \quad (462)$$

Suma zawarta w nawias we wzorze (461) wyraża kąt ω_B obrotu końcowego przekroju B pręta BC , zaś suma zawarta w nawias we wzorze (462) taki sam kąt $\omega_C = \varphi_C$ w punkcie C (por. § 3, wzór 451).

Po dokonaniu należytej redukcji i wprowadzeniu oznaczenia $k = \frac{J_b h}{J_s l}$ równania (460) — (462) przybierają następującą postać:

$$\begin{aligned} M_A(2k + 1) - Hh(k + 1) + \frac{R_A}{2}(l + 2lk) - \\ - \frac{Pb}{2l}(b + 2hk) = 0 \end{aligned} \quad (463)$$

$$\begin{aligned} M_A(k + 1) - \frac{Hh}{3}(3 + 2k) + \frac{R_A}{2}(l + 2hk) - \\ - \frac{Pb}{2l}(b + 2hk) = 0 \end{aligned} \quad (464)$$

$$\begin{aligned} M_A l(2k + 1) - Hhl(k + 1) + \frac{R_A l}{3}(3hk + l) - \\ - \frac{2P}{l}\left(bhkl + \frac{b^3}{3} + \frac{ab^2}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (465)$$

Po rozwiązaniu trzech równań linjowych z trzema niewiadomymi (463) — (465) dochodzimy do następujących wzorów dla H , M_A i R_A :

$$H = \frac{3Pab}{2hl(2 + k)} \quad (466)$$

$$M_A = \frac{Pab}{2l} \cdot \frac{5k - 1 + \frac{2a}{l} \cdot (2 + k)}{(2 + k)(1 + 6k)} \quad (467)$$

$$R_A = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{1 + 6k + \frac{a}{l} - 2 \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^2}{1 + 6k} \quad (468)$$

W razie, gdy siła P zaczepiona jest w środku ramy i gdy $a = b = \frac{l}{2}$, równanie (465) staje się zbędnem, gdyż reakcja podpory B wyznacza się

bezpośrednio z warunków symetrii i równa się $\frac{P}{2}$. Dla H i M_A otrzymujemy w tym wypadku wartości następujące:

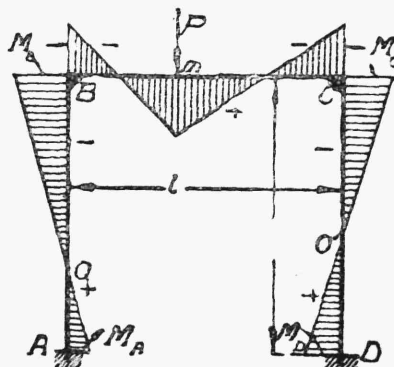
$$H = \frac{3}{8} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{P}{2 + k} \quad (469)$$

$$M_A = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1}{2 + k} \quad (470)$$

Wyznaczwszy ze wzorów (46b) — (468) H , M_A i R_A , możemy w każdym punkcie ramy obliczyć działający w nim moment zginający (rys. 269). Wzdłuż AB działa w danym wypadku moment zmienny, równy:

$$M_\alpha = M_A - H \cdot \alpha \quad (471)$$

przy $\alpha = h$ t.j. w punkcie B moment równa się $M_A - Hh$, zaś w punkcie A t.j. przy $\alpha = 0$ równa się M_A . Łącząc ze sobą końce rzędnych, odpowiadających otrzymanym w ten sposób momentom, znajdujemy wykres momentów zginających wzdłuż słupa AB . W punkcie C i D momenty równają się odpowiednio:



Rys. 269.

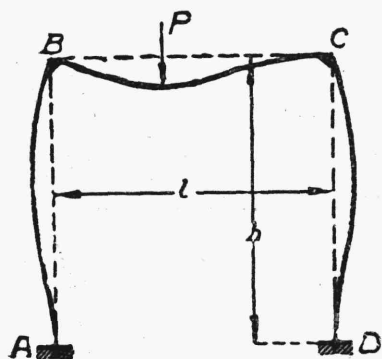
$$M_C = M_A - H \cdot h + R_A \cdot l - P \cdot b \quad (472)$$

$$M_D = M_A + H \cdot h + R_A \cdot l - P \cdot b \quad (473)$$

Według tych wielkości możemy wykonać wykres momentów zginających dla słupa CD . Na długości belki BC moment zginający będzie zmieniał się według wzorów:

$$M_\alpha = M_A - H \cdot h + R_A \cdot \alpha \quad (474)$$

$$M_\alpha = M_A - H \cdot h + R_A \cdot \alpha - P(\alpha - a)$$



Rys. 270.

Odształcenie ramy przedstawione jest na rys. 270.

Zamiast przytoczonych wyżej obliczeń ramy bezprzegubowej mogliśmy tu zastosować również jeden ze sposobów przedstawionych na rys. 260 i 261.

Gdybyśmy w ramie, przedstawionej na rys. 262 lub na rys. 266, zastąpili siłę P przez obciążenie ciągłe, zajmujące część belki ramy między punktami G i K (rys. 266), to we wzorach (466), (467) i (468) musielibyśmy zastąpić siłę P przez siłę $q \alpha$, gdzie α oznacza odległość przekroju ruchomego na przęcie BC od punktu B , a q obciążenie jednostkowe. Otrzymane w ten sposób wzory powinniśmy zcałkować w granicach, zajętych przez obciążenie.

W razie gdy q jest wielkością stałą, a obciążenie zajmuje całą belkę ramy, otrzymujemy wzory następujące:

Dla ramy dwuprzegubowej mamy:

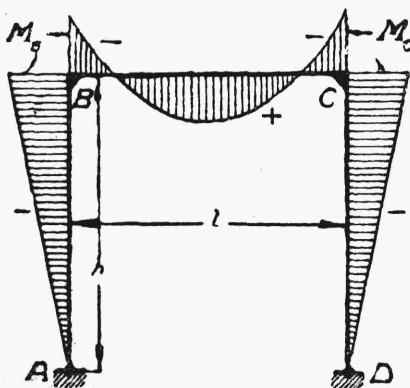
$$H = C \int_0^l \alpha(l - \alpha) d\alpha = \frac{q l^2}{4h(3 + 2k)} \quad (475)$$

Dla ramy bezprzegubowej mamy:

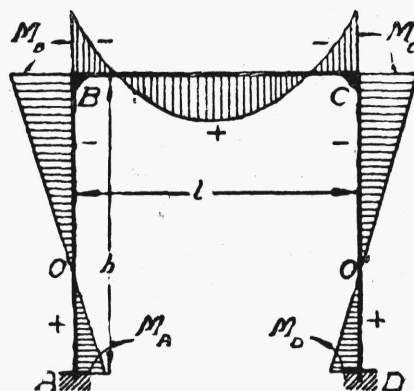
$$H = C_1 \int_0^l \alpha(l - \alpha) d\alpha = \frac{q l^2}{4h(2 + k)} \quad (476)$$

$$\begin{aligned} M_A = C_2 \int_0^l \left[5k - 1 + \frac{2\alpha}{l} \cdot (2 + k) \right] \alpha(l - \alpha) d\alpha = \\ = \frac{q l^2}{12(2 + k)} \end{aligned} \quad (477)$$

Przez C we wzorach (475) — (477) oznaczone są czynniki wzorów dla H i M_A niezależne od α .



Rys. 271.



Rys. 272.

Po wyznaczeniu H i M_A obliczenie momentów w poszczególnych punktach ramy odbywa się tak samo, jak w dwóch poprzednich wypadkach. Wykresy momentów zginających będą tu miały kształt przedstawiony na rys. 271 i 272.