

Przy obciążeniu ruchomem na łukach, obliczanych metodą równowagi granicznej, zwykle wykreślamy linię ciśnień w trzech wypadkach następujących:

1°, przy obciążeniu całego łuku, przeprowadzając ją w zworniku w odległości  $\frac{2}{3} h$ , a w węzłowiach w odległości  $\frac{1}{3} h$  od podniebienia,

2°, przy obciążeniu całego łuku, przeprowadzając ją przez środki przekroju zwornikowego i przekrojów węzłowiowych,

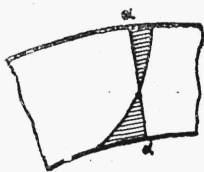
3°, przy obciążeniu połowy łuku, przeprowadzając ją w zworniku przez środek przekroju, w węzłowiach od strony obciążenia w odległości  $\frac{1}{3} h$  od podniebienia i w drugim węzłowiach w odległości  $\frac{2}{3} h$  od podniebienia.

Przy wykreślaniu wymienionych trzech linii ciśnień stawiamy sobie za warunek, aby żadna z nich nie wychodziła ze środkowej trzeciej części wysokości przekroju łuku.

Pomysł zastosowania metody równowagi granicznej do łuków należy do Navier'a, zaś oparte na tej metodzie obliczenie łuków zostało rozpoznacone przez Méry'ego, głównie we Francji.

### 3. Odształcenia nieskończenie małego odcinka pręta zakrzywionego i rozkład naprężeń $\sigma$ .

Kiedy była mowa o belkach prostych, przyjęcie założenia przekrojów płaskich doprowadzało do linowego rozkładu naprężeń normalnych. To samo miało miejsce przy obliczeniu słupów na ściskanie mimośrodowe. W obliczeniu łuków założenie przekrojów płaskich nie pociąga za sobą linowego rozkładu naprężeń i dlatego musimy naogół zdecydować się na wyrzeczenie się albo założenia płaskich przekrojów, albo też linowego rozkładu naprężeń. Podczas gdy to ostatnie założenie doprowadza nas do wzoru (504), założenie pierwsze wymaga wzorów znacznie bardziej złożonych, doprowadzając w danym przekroju łuku do rozkładu naprężeń np. w rodzaju przedstawionego na rys. 294.



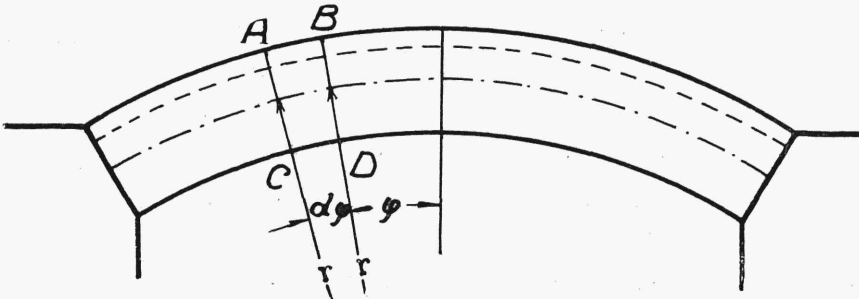
Rys. 294.

Badanie naprężeń w prętach zakrzywionych, dokonane metodą optyczną<sup>1)</sup>, wykazuje większą zgodność z doświadczeniem założenia płaskich przekrojów<sup>2)</sup>. W dalszym ciągu będziemy też opierać się na tym właśnie założeniu, jednak wykażemy, że w pewnych wypadkach szczególnych, mających znaczenie praktyczne, można uciec się do uproszczeń, które w rezultacie pozwolą i w tych wypadkach również korzystać ze wzoru (504).

<sup>1)</sup> Vid. Rozdz. X, 8.

<sup>2)</sup> Timoszenko „Kurs sprótywlenja matierjałow“, 1913 str. 325.

Wycinamy z łuku, przedstawionego na rys. 295, lub z innego jakiegokolwiek pręta zakrzywionego o zmiennym przekroju poprzecznym klin  $ABDC$  zapomocą dwóch płaszczyzn normalnych do osi łuku i nachylonych do



Rys. 295.

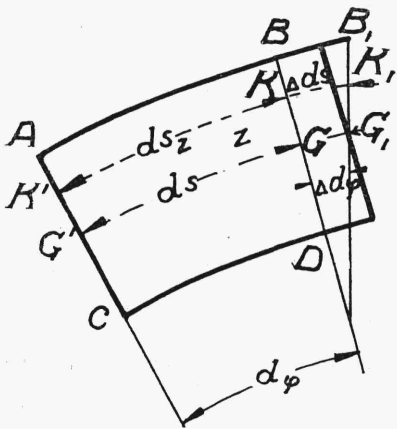
siebie pod nieskończenie małym kątem  $d\varphi$ . Klin  $ABDC$  przedstawiony jest na rys. 296.

Ustalamy zależność między wydłużeniem  $\Delta ds$  nieskończenie małego odcinka  $ds$  łuku, a siłą  $N_\alpha$  i momentem  $M_\alpha$  w danym przekroju łuku.

Oznaczamy przez  $ds_z$  odcinek włókna oddalonego od osi o  $z$  i przez  $r$  promień krzywizny osi łuku (naogół zmienny).

Na podstawie rysunków 295 i 296 możemy ustalić zależności następujące:

$$ds = r d\varphi \quad \text{i} \quad ds_z = (r + z) d\varphi \quad (505)$$



Rys. 296.

Z trapezu  $BB_1G_1G$  wyznaczamy  $\Delta ds_z$ , czyli wydłużenie włókna  $K'K$  ( $\Delta ds = GG_1$ ):

$$\Delta ds_z = \Delta ds + z \Delta d\varphi \quad (506)$$

gdzie  $\Delta d\varphi$  oznacza przyrost kąta  $d\varphi$ .

Podzieliwszy wzór (506) przez wzór (505), otrzymujemy:

$$\frac{\Delta ds_z}{ds_z} = \frac{\Delta ds + z \Delta d\varphi}{(r + z) d\varphi} =$$

$$= \frac{1}{r + z} \left( \frac{\Delta ds}{d\varphi} + \frac{z \Delta d\varphi}{d\varphi} \right) = \frac{1}{r + z} \cdot \left( \frac{\Delta ds}{ds} \cdot r + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot z \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{r+z} \cdot \left( \frac{\Delta ds}{ds} \cdot r + \frac{\Delta ds}{ds} \cdot z - \frac{\Delta ds}{ds} \cdot z + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot z \right) = \\
 &= \frac{1}{r+z} \cdot \left[ \frac{\Delta ds}{ds} \cdot (r+z) + \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \cdot z \right] \quad (507)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta ds_s}{ds_s} = \frac{\Delta ds}{ds} + \frac{z}{r+z} \cdot \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) = \varepsilon \quad (507')$$

gdzie  $\varepsilon$  jest to wydłużenie jednostkowe pewnego włókna.

Oznaczamy przez  $A$  pole przekroju łuku, przez  $dA$  pole przekroju włókna i przez  $\sigma$  naprężenie normalne w łuku. Wobec tego, że  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , otrzymujemy dla  $N$  i  $M$ , działających w danym przekroju (znak  $\sigma$  opuszczamy), wzory następujące:

$$N = \int_A \sigma dA \qquad M = \int_A \sigma z dA \quad (508)$$

Ponieważ  $\frac{\Delta ds_s}{ds_s}$  oznacza wydłużenie jednostkowe włókna, więc

$$N = \frac{\Delta ds}{ds} \cdot EA + \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) E \int_A \frac{z dA}{r+z} \quad (509)$$

$$M = \frac{\Delta ds}{ds} E \int_A z dA + \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) E \int_A \frac{z^2 dA}{z+r} \quad (510)$$

Ponieważ  $\int_A z dA = 0$ , jako moment statyczny całego przekroju

łuku względem jego osi obojętnej (por. rozdz. III, 1), więc

$$M = \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) E \int_A \frac{z^2 dA}{z+r} \quad (511)$$

Przekształcamy całkę z równania (509):

$$\begin{aligned} \int \frac{z dA}{z+r} &= \int \frac{r^2 \cdot z \cdot dA}{r^2 (r+z)} = \int \frac{(r^2 z + rz^2 - rz^2) dA}{r^2 (r+z)} = \\ &= \int \left[ \frac{rz(r+z)}{r^2 (r+z)} - \frac{z^2 r}{r^2 (r+z)} \right] dA = \int \left[ \frac{z}{r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{z^2 r}{r+z} \right] dA = -\frac{Y}{r^2} \end{aligned} \quad (512)$$

gdzie  $\int_A \frac{z}{r} dA = 0$  a  $\int_A z^2 \cdot \frac{r}{r+z} \cdot dA = Y$  (513)

W związku w tem równania (509) i (510) przybierają następującą postać:

$$N = \frac{\Delta ds}{ds} \cdot EA - \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \cdot E \cdot \frac{Y}{r^2} = \frac{\Delta ds}{ds} \cdot EA - \frac{M}{r} \quad (514)$$

$$M = \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) \cdot E \cdot \frac{Y}{r} \quad (515)$$

skąd otrzymujemy, że

$$\Delta ds = \frac{N}{EA} \cdot ds + \frac{M}{r EA} \cdot ds \quad (516)$$

Wzór dla  $M$  można przekształcić w związku ze wzorem (514) w następujący:

$$M = \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{N}{EA} - \frac{M}{r EA} \right) \cdot E \cdot \frac{Y}{r} \quad (517)$$

skąd

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EY} \cdot ds + \frac{N}{r EA} \cdot ds + \frac{M}{r^2 EA} \cdot ds \quad (518)$$

Napężenia normalne w łuku obliczamy ze wzoru  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  i ze wzoru (507'):

$$\sigma = \frac{\Delta ds}{ds} \cdot E + \frac{z}{r+z} \left( \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} \right) E \quad (519)$$

Obliczamy stosunek  $\frac{\Delta ds}{ds}$  ze wzoru (514) a różnicę  $\left(\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds}\right)$  ze wzoru (515):

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EA} + \frac{M}{r \cdot E \cdot A}$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} - \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{Mr}{E \cdot Y} \quad (520)$$

poczem nadajemy wzorowi dla naprężenia w dowolnym punkcie grubości łuku następującą postać:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{r \cdot A} + \frac{Mz}{Y} \cdot \frac{r}{r + z} \quad (521)$$

We wzorach (518) i (521) możemy przyjąć, że  $Y = J$ , gdyż stosunek między temi wielkościami w miarę wzrastania stosunku  $\frac{r}{h}$  (promienia do grubości łuku) szybko spada, tak że np. dla przekroju prostokątnego mamy:

przy	$\frac{r}{h} = 1,$	$\frac{Y}{J} = 1,18$
"	" 3,	" = 1,02
"	" 5,	" = 1,01
"	" 7,	" = 1,00

Stosunek  $\frac{r}{h}$  w łukach może być niższy od 7 najwyżej w wypadku rur kanalizacyjnych, które i tak rzadko bywają obliczane ściśle, lub w zwornikach przepustów o małych rozpiętościach. Wobec tego możemy naogół uważać, że założenie  $Y = J$  powoduje błąd mniejszy od 1%.

W hakach, ogniwach łańcuchów i t. p., gdzie stosunek  $\frac{r}{h}$  może być niższy od cyfr podanych wyżej, nie może być  $Y$  zastąpione przez  $J$ , natomiast w tych wypadkach we wzorze (521) możemy pominąć zupełnie

wyraz pierwszy i drugi, t. j. wpływ wydłużenia się osi łuku na naprężenia. Będziemy więc rozporządzali wówczas wzorem następującym:

$$\sigma = \frac{Mz}{Y} \cdot \frac{r}{r+z} \quad (522)$$

Dla łuków o małej krzywiźnie osi wzory (516) i (518) mogą zostać uproszczone przez pominięcie wszystkich wyrazów, mających  $r$  w mianowniku. Przy ścisłości przeciętnych obliczeń technicznych możemy to zawsze zrobić przy  $\frac{f}{l} < \frac{1}{3,5}$ . Wzory dla  $\Delta d\varphi$  i  $\Delta ds$  przybierają wówczas postać następującą:

$$\Delta ds = \frac{N}{EA} \cdot ds \quad \Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} \cdot ds \quad (516')$$

W powyższych wzorach wyrażamy  $N$  i  $M$ , jako funkcje  $H$ ,  $R_A$  i  $M_A$ , czyli jako funkcje składowych reakcji podpory łuku (por. § 1).

Odpowiednio do wzorów (516') może być uproszczony i wzór (521).

Wchodzący tu ułamek  $\frac{r}{r+z}$  tem mniej różni się od jedności, im większe jest  $r$  w porównaniu do  $z$ , w szczególności do  $z = \frac{h}{2}$  t. j. równego połowie grubości łuku. Zakładając, że  $\frac{r}{r+z} = 1$  i pomijając  $\frac{M}{rA}$  dochodzimy do przytaczanego już wyżej wzoru (504):

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{Mz}{J}$$

który jest wzorem na nierównomierne ściskanie i który wyraża linjowy rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym łuku. W ten sposób, wyszedłszy z założenia przekrojów płaskich, doszliśmy dla pewnych wypadków szczególnych do linjowego rozkładu naprężeń. Rozkład ten może jednak mieć miejsce tylko przy poczynionych wyżej założeniach, które ograniczają zakres stosowalności wzorów uproszczonych do łuku o małej krzywiźnie, inaczej mówiąc do łuku niezbyt wyniosłego. Stosowanie uproszczonego wzoru (504), zamiast ścisłego, wywołuje błąd, który dla przeciętnych wymiarów dźwigarów łukowych, nie przekracza zwykle  $\frac{1}{4}\%$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> J. Weyrauch „Elastische Bogenträger“, 1911, str. 32.