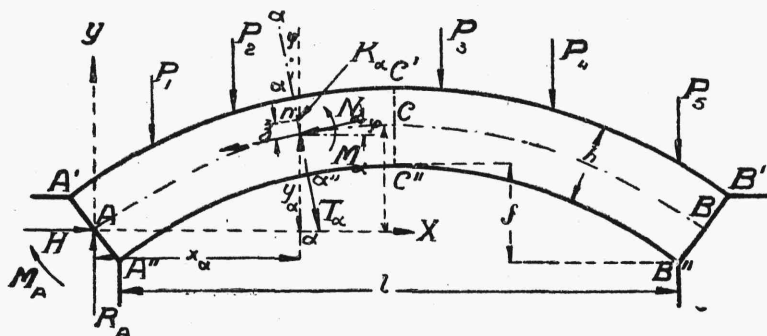


ROZDZIAŁ XIII.

Układy krzywolinowe.

1. Równania równowagi odcinka łuku.

Łukiem lub dźwigarem łukowym nazywamy belkę lub płytę, mającą kształt zakrzywiony w płaszczyźnie pionowej (płaszczyźnie sił) i spoczywającą na dwóch podporach (rys. 286).



Rys. 286.

Poszczególne elementy geometryczne łuku noszą następujące nazwy: Powierzchnię $A'B'$ nazywamy grzbietem łuku, powierzchnię $A''B''$ jego podniebieniem, wymiar h wysokością przekroju albo grubością łuku, l jego rozpiętością w świetle, f strzałką (albo wyniosłością) w świetle. Przekrój normalny $A'A''$ lub $B'B''$ nazywamy wezłowiec, przekrój $C'C''$, najwyżej położony w łuku, zwornikiem.

Gdy stosunek szerokości łuku do jego grubości (wysokości przekroju) jest znaczny, wówczas nazywamy łuk kamienny, betonowy lub żelazbetonowy sklepieniem cylindrycznym. Nazwa ta nie bywa stosowana do łuków żelaznych lub drewnianych.

Przekroje poprzeczne łuków mają najczęściej kształt prostokątny w łukach z wszelkiego rodzaju muru i w łukach drewnianych, dwuteowy i korytkowy w żelaznych, wreszcie teowy i prostokątny w żelazobetonowych.

Linję, będącą miejscem geometrycznym środków ciężkości przekrojów poprzecznych łuku, nazywamy jego osią (linja ACB na rys. 286).

Normalnie siły działają na łuk w kierunku od grzbietu do podniebienia, niekiedy działają jednak i w kierunku od podniebienia do grzbietu i wtedy mamy do czynienia z tak zwanymi łukami odwróconymi (§ 10, rys. 329). W warunkach podobnych do warunków łuku odwróconego znajduje się również łańcuch (lub lina nośna) zawieszony w dwóch punktach (nie na jednym pionie), którego równowaga będzie omówiona w § 10 niniejszego rozdziału.

Gdy łuki stanowią jedną całość z murami, na których się opierają, lub gdy łuki żelazne są w mur wpuszczone, łuki takie nazywamy bezprzegubowymi. Łuki, mające na podporach przeguby, nazywamy dwuprzegubowymi, a łuki, mające prócz tego przegub i w zworniku, trójp przegubowymi. Wreszcie mogą mieć miejsce również, rzadko zresztą stosowane, łuki o jednym tylko przegubie, w zworniku.

Łuki są naogół konstrukcjami rozporowemi, wobec czego, przy ustalaniu równań równowagi ich poszczególnych części, musimy uwzględnić równanie statyki $\Sigma X = 0$, które w konstrukcjach belkowych staje się tożsamością.

Bierzemy, jako wypadek najogólniejszy, łuk bezprzegubowy, przedstawiony na rys. 286, i przyjmujemy układ osi współrzędnych według tegoż rysunku.

Obliczenie reakcji każdej z podpór łuku, jako podpory płaskiej, wymaga wyznaczenia trzech niewiadomych, jakimi są rzuty reakcji na oś OX (parcie poziome, czyli rozpór H) i na oś OY (siła R) oraz moment podporowy M . Oznaczamy wielkości te w zastosowaniu do lewej podpory odpowiednio przez H , R_A i M_A i robimy w dowolnym punkcie łuku przekrój normalny $\alpha\alpha$, nachylony pod kątem φ względem płaszczyzny pionowej (płaszczyzny OY lub AY).

Oddziaływanie prawej części łuku, oddzielonej przekrojem $\alpha\alpha$, na lewą wyraża się siłą K_α zaczepioną do przekroju $\alpha\alpha$ w punkcie n z mimośrodem ξ . Siłę tę rozkładamy na siłę T_α działającą stycznie do przekroju

i na siłę N_α działającą do tego przekroju normalnie. Zaczepiając do przekroju $\alpha\alpha$ moment $M_\alpha = N_\alpha \cdot \xi$, możemy uważać siłę N_α , jako zaczepioną w środku przekroju. Siłę N_α nazywamy siłą podłużną w łuku, a siłę T_α siłą poprzeczną w danym przekroju.

Ustawiamy równania równowagi dla części łuku $\alpha'A'A''\alpha''$, zawartej między lewym węzłowiem a przekrojem $\alpha\alpha$. Siły, działające na bryłę $\alpha'A'A''\alpha''$, rzutujemy na kierunki sił T_α i N_α (rys. 286). Tą drogą otrzymujemy dla wielkości N_α , T_α i M_α w przekroju $\alpha\alpha$ wzory następujące:

$$T_\alpha = R_A \cos \varphi - H \sin \varphi - \mathfrak{T}_\alpha \quad (499)$$

$$N_\alpha = R_A \sin \varphi + H \cos \varphi - \mathfrak{N}_\alpha \quad (500)$$

$$M_\alpha = M_A + R_A \cdot x_\alpha - H \cdot y_\alpha - \mathfrak{M}_\alpha \quad (501)$$

gdzie \mathfrak{N}_α i \mathfrak{T}_α oznaczają odpowiednio sumy rzutów sił P bezpośrednio zaczepionych do łuku, działających na lewo od przekroju $\alpha\alpha$, a \mathfrak{M}_α sumę momentów tych sił względem środka ciężkości przekroju, czyli że

$$\mathfrak{N}_\alpha = \Sigma P \sin \varphi \quad \mathfrak{T}_\alpha = \Sigma P \cos \varphi \quad \mathfrak{M}_\alpha = \Sigma P a$$

gdzie a oznacza odległość linii działania siły P od środka przekroju $\alpha\alpha$. Na podstawie przytoczonych równań dla danego przekroju $\alpha\alpha$, określonego przez współrzędne x_α i y_α jego środka ciężkości, możemy wyznaczyć N_α , T_α i M_α , a więc i mimośród siły N_α . Krzywą, będącą geometrycznym miejscem punktów zaczepienia sił K_α (punkty n) przy ruchomym przekroju $\alpha\alpha$, nazywamy krzywą ciśnień.

O ile siły działające na łuk są skierowane równoległe do osi OX , wówczas w równaniach (499) ~ (501) zmianie ulegają w sensie algebraicznym jedynie wielkości \mathfrak{T}_α , \mathfrak{N}_α , \mathfrak{M}_α .

O ile podpora A nie jest płaska, lecz przegubowa, dwa pierwsze równania równowagi nie ulegają zmianie, w trzecim zaś ginie tylko wyraz M_A , jako równy zeru.

Aby ustalić dla łuku zależność między wielkościami M_α i T_α , analogiczną do zależności wyrażonej równaniem (85) dla belek prostych (por. rozdz. IV, 5), różniczkujemy równanie (501) względem odległości s , liczonych wzdłuż osi łuku. Ponieważ wielkości M_A , R_A i H musimy uważać w tym wypadku za stałe, otrzymujemy więc, że:

$$\frac{dM_\alpha}{ds} = R_A \cdot \frac{dx_\alpha}{ds} - H \cdot \frac{dy_\alpha}{ds} - \Sigma P \cdot \frac{da}{ds} \quad (501')$$

Ponieważ $\frac{dx_\alpha}{ds} = \cos \varphi$ i $\frac{dy_\alpha}{ds} = \sin \varphi$ i ponieważ, co do bezwzględnej wartości $\frac{dx_\alpha}{ds} = \frac{da}{ds}$, więc wzór (501') w związku z równaniem (499) przybiera postać następującą:

$$\frac{dM_\alpha}{ds} = T_\alpha \quad (502)$$

Ze wzoru (502) wynika, że $\max M_\alpha$ ma miejsce w tym przekroju poprzecznym łuku, w którym siła poprzeczna równa jest zeru ($T_\alpha = 0$).

W razie łuku tróprzegubowego równania (500) i (501) są wystarczające do wyznaczenia krzywej ciśnień. Aby krzywą taką sporządzić, ustawiamy przedewszystkiem równanie (501) dla podpory B . Zakładając, że przekrój $\alpha\alpha$ odpowiada prawej podporze przegubowej, mamy tu (przy $x_\alpha = l$ i $y_\alpha = 0$):

$$M_B = R_A \cdot l - \mathfrak{M}_B = 0$$

skąd

$$R_A = \frac{\mathfrak{M}_B}{l} \quad (503)$$

W dalszym ciągu ustawiamy to samo równanie w zastosowaniu do przegubu C , którego współrzędne są odpowiednio równe $x_\alpha = a$ i $y_\alpha = b$:

$$M_C = \frac{\mathfrak{M}_B}{l} \cdot a - H \cdot b - \mathfrak{M}_C = 0$$

skąd

$$H = \frac{\mathfrak{M}_B \cdot a - \mathfrak{M}_C \cdot l}{l \cdot b} = \frac{1}{b} \cdot (R_A \cdot a - \mathfrak{M}_C) \quad (503')$$

Reakcję R_B znajdujemy z równania $\Sigma Y = 0$.

Zadanie łuku tróprzegubowego jest więc statycznie wyznaczalne, gdyż mamy tu do obliczenia tylko trzy składowe reakcyj, mianowicie R_A , R_B i H , przy trzech równaniach równowagi (2 równania $\Sigma M = 0$ dla 2 przegubów i jedno równanie $\Sigma Y = 0$ dla całego łuku).

Mając obliczone H i R_A ze wzorów (503) i (503'), możemy na podstawie wzorów (500) i (501) wyznaczyć N_α i M_α dla dowolnego przekroju łuku, a co zatem idzie ze wzoru $M_\alpha = N_\alpha \xi$ wyznaczyć i mimośród ξ , czyli

krzywą ciśnień w łuku tróprzegubowym. Krzywa ta przejść musi przez wszystkie trzy przeguby łuku, gdyż w tych punktach mimośród równy jest zeru.

Równanie $\Sigma X = 0$ w zastosowaniu do łuku obciążonego siłami pionowymi (t.j. równoległe do osi OY) przybiera postać $H_A + H_B = 0$, skąd wynika, że składowe poziome reakcyj podpór łuku w tych wypadkach są sobie równe, co do wielkości bezwzględnej, i zwrócone przeciwnie.

W razie, gdy nie wszystkie siły, działające na łuk, są równoległe do osi OY , siła H_A nie równa się naogół sile H_B .

W łuku dwuprzegubowym w razie sił równoległych do osi OY mamy do wyznaczenia, podobnie jak w tróprzegubowym, 3 składowe reakcyj, brak nam jednak trzeciego przegubu C , który w poprzednim wypadku pozwolił na ustalenie równania (503'). Zadanie zawiera więc jedną wielkość statycznie niewyznaczalną. Reakcja R_A może być tu wyznaczona, jak poprzednio, z równania (503), a reakcja R_B z równania $\Sigma Y = 0$.

W łuku bezprzegubowym mamy dla powodów, podobnych do wymienionych w poprzednim wypadku, wyznaczyć 3 wielkości statycznie niewyznaczalne.

Równania, brakujące do obliczenia łuków statycznie niewyznaczalnych otrzymujemy albo ze wzorów dla odkształceń łuku, albo zapomocą pewnych, opartych na doświadczeniach założeń upraszczających, które doprowadzają nas do tak zwanej metody równowagi granicznej.

Łuki, mające podporę przesuwną, nie dają rozporu i mogą być uważane za dźwigary belkowe, gdy jednak zachodzi potrzeba obliczenia odkształceń lub naprężeń, to obliczenie musi być w tym wypadku wykonane zapomocą wzorów, wyprowadzonych dla łuków, jako prętów zakrzywionych.

W łukach, wykonanych z muru, często bywa dogodnym przedstawienie ciągłego obciążenia łuku, jako obciążenia tem samem murem, z którego łuk jest wykonany. Obciążenie sprowadzamy tu do odpowiedniej warstwy muru, leżącej na łuku, krzywą zaś ograniczającą tę warstwę od góry nazywamy krzywą obciążenia (rys. 332, § 11 tego rozdziału).

2. Wykreślny sposób obliczenia łuków i metoda równowagi granicznej.

Bierzemy łuk symetryczny i symetrycznie obciążony, którego połowa przedstawiona jest na rys. 287. Przypuśćmy, że reakcja K_A podpory A jest nam wiadoma co do swej wielkości, punktu zaczepienia i kierunku i przystępujemy do ustalenia warunków równowagi klina $A'I'I''A''$ danego łuku. Na klin ten, poza reakcją K_A , działa siła zewnętrzna P_1 , (zawierająca również i ciężar własny klina) i siła K_1 wyrażająca wzajemne oddziały-