

O ile chodzi o wyznaczenie najdogodniejszego stosunku wysokości przekroju prostokątnego h do jego szerokości a i o ile prostokąt ma być wycięty z koła o promieniu r , wówczas do wyznaczenia najwłaściwszego stosunku $\alpha = \frac{a}{h}$ rozporządzamy równaniami:

$$(\alpha h)^2 + h^2 = 4r^2 \quad (199)$$

$$\frac{dW}{d\alpha} = 0 \quad (200)$$

Z równań tych otrzymujemy, że stosunek α , przy którym dla danego r możemy otrzymać max W , równa się 0,7.

Niekiedy używamy dla potównania przekrojów poprzecznych belek zginanych miernika $\frac{W}{A^{\frac{3}{2}}}$ posiadającego wymiar 0. Miernik ten jest szczególnie dogodny przy stosowaniu przekrojów o kształtach geometrycznie podobnych np. dla różnych typów szyn.

4. Naprężenia styczne przy zginaniu.

Siły poprzeczne, działające na belkę, wywołują przesuwanie się poszczególnych części belki względem siebie, przyczem powstają naprężenia styczne w płaszczyznach przesuwania.

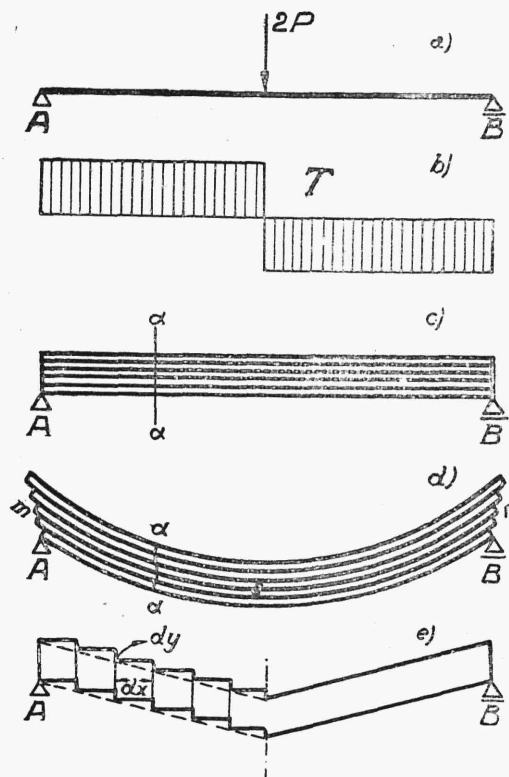
Wyobraźmy sobie belkę o przekroju prostokątnym AB (rys. 132a) obciążoną siłą $2P$ w środku. Odpowiedni wykres sił poprzecznych przedstawiony jest na rys. 132b.

Gdyby belka nie doznawała żadnych naprężeń normalnych, wówczas obraz jej odkształcenia, będący rezultatem samego tylko przesuwania, mógłby być przedstawiony w sposób analogiczny do omówionego w rozdz. VI, 2 (rys. 105). Odkształcenie miałoby tu przebieg następujący:

Jednakowe siły poprzeczne we wszystkich przekrojach, położonych w lewej połowie belki, wywołują pionowe przesunięcie się względem siebie nieskończenie wąskich pionowych pasków dx , wyciętych z tej belki o równe sobie wielkości dy (rys. 132e, lewa połowa). W rezultacie dochodzimy do odkształcenia belki, przedstawionego na rys. 132e (prawa połowa). Naprężenia styczne działają tu w płaszczyznach prostopadłych do osi belki. Naprężenia te nazywamy ścinającymi.

Powyższy obraz odkształcenia komplikuje się znacznie, gdy uwzględnimy wpływ naprężeń normalnych na wyginanie się belki. Przedewszyst-

kiem będziemy więc musieli liczyć się już ze zwichrzeniem płaskich przekrojów i uwzględnić nierównomierny rozkład naprężeń stycznych w danym przekroju. Prócz tego musimy tu wziąć pod uwagę naprężenia styczne, powstające w płaszczyznach równoległych do osi belki.

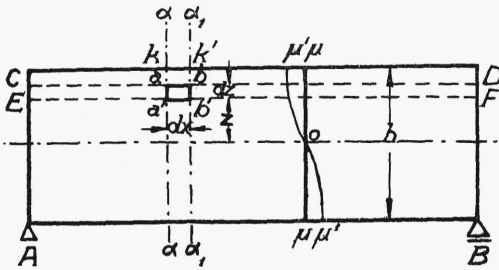


Rys. 132.

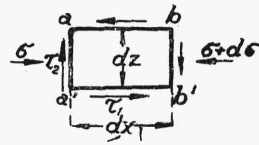
Wyobraźmy sobie, mianowicie, że belka podzielona jest w kierunku podłużnym na włókna. Gdyby te włókna nie stanowiły jednej całości, ślizgałyby się wówczas jedno po drugim, przy ugięciu belki, wskutek czego odkształcenie miałoby formę przedstawioną na rys. 132d, a przekroje belki, przestałyby być płaskimi. Przedstawionemu odkształceniu stają na przeszkodzie naprężenia styczne, rozłożone po powierzchni msn i do niej równoległych. Wskutek tych naprężeń ślizganie się po sobie włókien staje się nieznaczne, tak że nie może wpłynąć na rozkład naprężeń normalnych i dlatego też przy obliczeniu tych ostatnich możemy w dalszym ciągu uważać odkształcone przekroje belki za płaskie, licząc się ze zwichrzeniem

przekrojów tylko przy obliczeniu naprężeń stycznych. Przedstawiony na rys. 132d rodzaj odkształcenia nazywamy nieraz *rozwarstwieniem*, gdyż poszczególne warstwy poziome materiału ulegają tu względem siebie przesunięciu. Zwężenie płaskiego przekroju $\mu\mu$ przedstawione jest na rys. 133.

Aby obliczyć naprężenia styczne, powstające przy zginaniu, bierzemy belkę o jednostajnej wysokości i przekroju prostokątnym, a w niej dwa nieskończenie bliskie do siebie przekroje $\alpha\alpha$ i $\alpha_1\alpha_1$ (rys. 133). Prócz tego przeprowadzamy powierzchnię EF oddaloną o z od powierzchni obojętnej i powierzchnię CD oddaloną od EF o dz . Otrzymujemy tą drogą graniastosłup o długości równej b (szerokość belki) i wymiarach poprzecznych dx i dz (rys. 133 i 134). Naprężenia styczne i normalne, działające na nieskończenie małe pola $b dz$ i $b dx$, uważamy za rozłożone równomiernie na tych polach.



Rys. 133.



Rys. 134.

Oznaczamy naprężenie styczne, działające na powierzchnię aa' , przez τ_2 , zaś naprężenie styczne, działające na powierzchnię $a'b'$, przez τ_1 .

Zaznaczyć należy, że chociaż naprężenia styczne, działające na równoległe do siebie ściany nieskończenie małego graniastostłupa $abb'a'$, nie są sobie równe, to jednak różnią się od siebie tylko o wielkości nieskończenie małe, tak że ich nierówność, aczkolwiek uwzględniona dalej (rozdz. VIII, 1), pozostaje jednak bez wpływu na rozumowania niniejszego paragrafu.

Na powierzchni aa' oraz bb' działają naprężenia normalne σ , względnie $\sigma + d\sigma$.

Naprężenia normalne do powierzchni ab i $a'b'$ powstaćby mogły jedynie wskutek bezpośredniego działania obciążenia i dlatego pomijamy je, jako naprężenia miejscowe (założenie 6, rozdz. I, 5).

Naprężenia, działające na przeciwne ściany graniastostłupa, mają kierunki odwrotne.

Wypełniamy równanie momentów dla sił, działających na omówiony graniastostłup, przyczem momenty obliczamy względem punktu b :

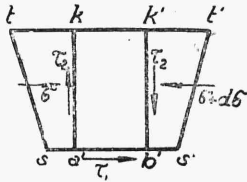
$$\Sigma M = \tau_2 b dx dz - \tau_1 b dx dz + \frac{b}{2} d\sigma dx dz = 0 \quad (201)$$

Wobec tego, że ostatni wyraz sumy (201) jest wielkością nieskończenie małą trzeciego rzędu, zaś dwie pierwsze tylko drugiego rzędu, wyraz ten odrzucamy, skąd mamy, iż

$$\tau_1 = \tau_2 \quad (202)$$

czyli, że naprężenia styczne, działające w danym punkcie (a') w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach są sobie równe; inaczej mówiąc, naprężenie ścinające równa się w danym punkcie naprężeniu rozwarstwiającemu.

Aby naprężenia τ wyznaczyć rozpatrujemy równowagę prostopadłościanu $a'kk'b'$ (rys. 133 i 135).



Rys. 135.

Znajdujemy sumę rzutów sił działających na prostą równoległą do osi belki (poziomą). Jeżeli moment zginający w przekroju belki xx oznaczymy przez M , zaś w przekroju a_1a_1 przez $M + dM$, wówczas będziemy mieli, że

$$\tau_1 b dx + \frac{M}{J} \int_z^{\frac{h}{2}} b z dz - \frac{M + dM}{J} \int_z^{\frac{h}{2}} b z dz = 0 \quad (203)$$

skąd

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{\int_z^{\frac{h}{2}} b z dz}{Jb} \quad (204)$$

wzór ten wobec równania

$$\frac{dM}{dx} = T$$

z rozdz. IV, 5 przybiera postać:

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{T S_z}{Jb} \quad (205)$$

gdzie S_z jest to moment statyczny części przekroju poprzecznego belki od płaszczyzny EF do krawędzi, wzięty względem osi obojętnej.

Na rys. 135 proste st i $s'l'$ przedstawiają wykresy naprężeń normalnych σ i $\sigma + ds$ odpowiednio w przekrojach $a'k$ oraz $b'k'$.

Ponieważ w przekroju prostokątnym

$$S_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

to otrzymujemy tu zamiast (205) wzór

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{T}{J} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (206)$$

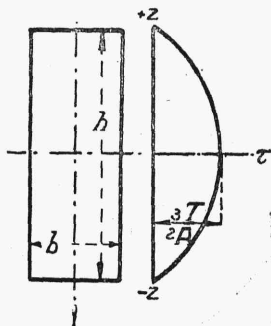
co daje przy $z = 0$:

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A} \quad (206')$$

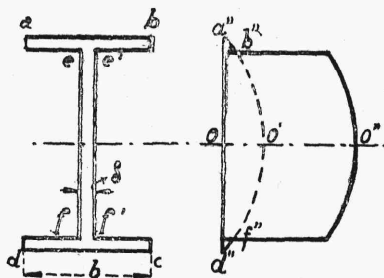
Wzory (206) i (206') wskazują na to, że wzdłuż wysokości danego przekroju belki naprężenia styczne zmieniają się według paraboli, dochodząc do największej swej wartości na osi obojętnej przekroju (rys. 136).

Dla przekrojów kolistych największe naprężenie styczne ma miejsce również na osi obojętnej i równa się $\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A}$.

W razie przekroju dwuteowego (rys. 137) wykreślamy przedewszystkiem krzywą naprężeń stycznych $a''b''o''f''d''$ tak, jak dla prostokąta $abcd$, przy czem części $a''b''$ i $f''d''$ tej krzywej odpowiadać będą rozkładowi naprężeń w stopkach ab i cd .



Rys. 136.



Rys. 137.

W dalszym ciągu ustawiamy wzór dla naprężeń stycznych w ściance $ee''ff'$:

$$\tau = \frac{TS}{\delta J} = \frac{T}{\delta J} \left[\frac{b h}{2} \cdot \frac{h}{4} - \frac{(b - \delta)(h - 2\delta_1)}{2} \cdot \frac{h - 2\delta_1}{4} - \delta \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right] \quad (207)$$

gdzie δ i δ_1 oznaczają odpowiednio grubości ścianki i stopki.

Ostatecznie dla naprężeń stycznych w belce dwuteowej otrzymujemy wykres $a''b''o''f''d''$.

Naprężenia wypadkowe powstałe z geometrycznego dodawania do siebie naprężeń stycznych i normalnych w danym punkcie belki zginanej (naprężenia ukośne) obliczone są w rozdz. VIII, 2.

5. Równanie odkształconej i jego całkowanie.

Obliczenie ugięć, czyli pionowych przesunięć poszczególnych punktów osi belki pod działaniem sił zewnętrznych, albo ma na celu pośred-