

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \quad (271)$$

$$\tau_{\min} = -\frac{1}{2} \sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

Mając na widoku wzór (271) i odejmując od siebie równania (265'), dochodzimy do zależności następującej:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (272)$$

która dla pewnego wypadku szczególnego była już wyprowadzona w rozdz. V, 2.

3. Elipsa naprężeń i wykres naprężeń Mohr'a.

Przypuśćmy, że wzory (258) i (260) zostały odniesione do układu osi współrzędnych, pokrywających się w danym punkcie z kierunkami naprężeń głównych (rys. 156, strona 149). Ponieważ naprężenie τ_o będzie tu równe zero, więc wzory te otrzymają postać następującą:

$$\sigma = \bar{\sigma}_x \sin^2 \varphi + \bar{\sigma}_y \cos^2 \varphi \quad (273)$$

$$\tau = \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y}{2} \sin 2\varphi \quad (273')$$

gdzie $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\sigma}_y$ oznaczają naprężenia główne w danym punkcie, t. j. naprężenia σ_{\max} lub σ_{\min} , a kąt φ oznacza, jak poprzednio, kąt nachylenia względem osi X -ów płaszczyzny, na którą działa pewne naprężenie normalne σ i styczne τ .

Położenie omówionego układu osi współrzędnych względem układu osi dowolnie przyjętych określi kąt otrzymany ze wzoru (263).

Wykonamy tu wykres naprężeń wypadkowych, działających na płaszczyzny nachylone względem osi X -ów pod zmiennym kątem φ , t. j. naprężeń σ_φ (rys. 157).

Na rys. 156 wektor AB przedstawia, co do kierunku i wielkości, naprężenie wypadkowe σ_φ , działające w punkcie A na płaszczyznę mn . Odcinek Ab oznacza tu naprężenie τ styczne do płaszczyzny mn , a odcinek Aa odpowiednie naprężenie normalne σ . Wyrażamy odcinki Ab i Aa przez współrzędne x i y punktu B , końca wektora AB :

$$x = \sigma \sin \varphi + \tau \cos \varphi \quad (274)$$

$$y = \sigma \cos \varphi - \tau \sin \varphi \quad (275)$$

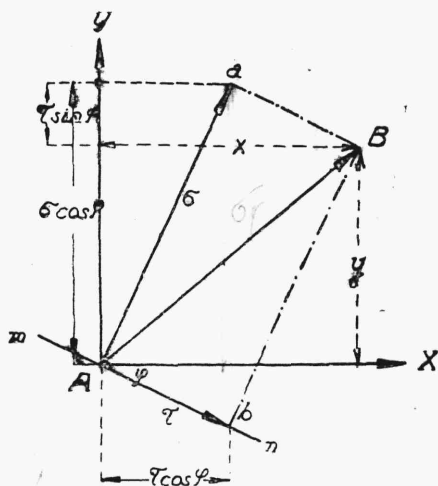
Wstawiamy tu wartości σ i τ ze wzorów (273) i (273') i otrzymujemy, że

$$x = \bar{\sigma}_x \sin \varphi \quad y = \bar{\sigma}_y \cos \varphi \quad (276)$$

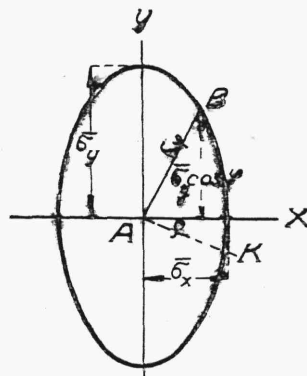
Rugując z tych równań φ , otrzymujemy równanie elipsy:

$$\frac{x^2}{\bar{\sigma}_x^2} + \frac{y^2}{\bar{\sigma}_y^2} = 1 \quad (277)$$

której półosiami są wektory $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\sigma}_y$ (rys. 157)



Rys. 156.



Rys. 157.

Jest to tak zwana elipsa naprężeń. W przestrzennym układzie naprężeń odpowiada jej elipsoida, zwana elipsoidą Lamé'go.

Jeżeli chcemy obliczyć naprężenie, działające w danym punkcie A na daną płaszczyznę AK , nachyloną pod kątem φ względem osi X -ów, to, mając

dla tego punktu elipsę naprężeń (rys. 157), bierzemy na niej punkt B o rzędnej $\bar{\sigma}_y \cos \varphi$ i łączymy go z punktem A . Odcinek AB da nam naprężenie wypadkowe σ_φ , działające na płaszczyznę AK .

Innego rodzaju wykres naprężeń normalnych i stycznych, działających w danym punkcie na daną płaszczyznę, daje, tak zwane, koło naprężeń Mohr'a.

Aby wykres ten otrzymać, odkładamy (rys. 158) na osi OD odcinki OA i OF , równe w pewnej skali σ_{\min} i σ_{\max} , przyczem w razie różnych znaków tych naprężeń odkładamy je z różnych stron osi OS . Odcinek AF rozpatrujemy, jako średnicę koła. Zatoczywszy to koło, odkładamy od kierunku DF kąt $FDB = 2\varphi$, gdzie φ oznacza kąt nachylenia względem osi X -ów płaszczyzny, dla której pragniemy wyznaczyć naprężenia σ i τ . Łatwo się przekonać, że odcinek OC będzie się tu równał σ , zaś odcinek BC będzie równy τ .

Rzeczywiście:

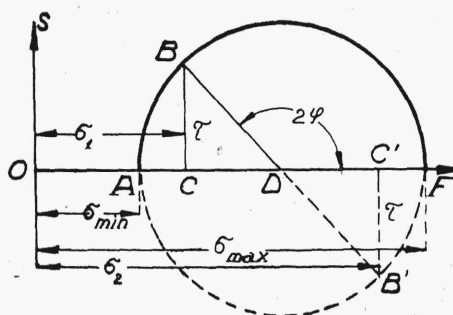
$$\begin{aligned} OC &= OA + AD - CD = & (278) \\ &= \sigma_{\min} + \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} - \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \cos(\pi - 2\varphi) = \\ &= \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} + \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \cos 2\varphi = \sigma \end{aligned}$$

co ściśle odpowiada równaniu (259) przy $\tau_0 = 0$, $\sigma_{\max} = \sigma_x$, $\sigma_{\min} = \sigma_y$

W ten sam sposób otrzymamy, że:

$$BC = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin 2\varphi = \tau \quad (279)$$

co znowu odpowiada równaniu (260).



Rys. 158.

Przypuśćmy teraz, że odcinki $OC = \sigma_1$ i $CB = \tau$ oznaczają naprężenia normalne i styczne, działające w danym punkcie na pewną płaszczyznę, a odcinki $OC' = \sigma_2$ i $C'B' = \tau$ odpowiednie naprężenia, działające w tym samym punkcie, na płaszczyznę do tamtej prostopadłą (rys. 158).

Mamy znaleźć naprężenia główne.

Ponieważ naprężenia styczne, działające w jednym punkcie

na płaszczyzny do siebie prostopadłe, są sobie równe, co do wartości bezwzględnej, więc $BC = B'C'$. Łącząc punkty B i B' ze sobą, znajdujemy punkt D przecięcia się prostej BB' z prostą OF . Punkt ten jest środkiem koła Mohr'a. Wykreśliwszy to koło, otrzymujemy z wykresu, że

$$\sigma_{\max} = OF \quad \text{i} \quad \sigma_{\min} = OA.$$

4. Wykresy naprężeń w belkach.

Wzory poprzednich paragrafów znajdują między innymi zastosowanie przy obliczaniu belek zginanych. W obliczeniach tego rodzaju zachodzi, mianowicie, niekiedy potrzeba sprawdzenia, czy naprężenia główne i największe naprężenia styczne w pewnych, specjalnie niebezpiecznych punktach, nie przekraczają naprężeń dopuszczalnych.

Weźmy np. belkę (rys. 159) utwierdzoną w jednym końcu a w drugim swobodną, obciążoną w sposób ciągły i równomierny. Jeżeli chodzi o wyznaczenie naprężeń głównych w pewnym punkcie belki, wówczas stosujemy tu wzór (265).

Wzór ten nieco upraszcza się w danym wypadku, gdyż naprężenie normalne równoległe do osi OY równa się tu zeru ($\sigma_y = 0$) w myśl założenia, dotyczącego naprężeń miejscowych (por. rozdz. I, 5). Otrzymujemy w ten sposób wzory:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_0^2 + \sigma_x^2} \quad (280)$$

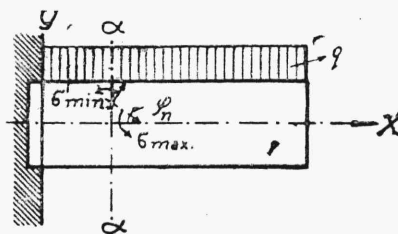
$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_0^2 + \sigma_x^2}$$

które nazywamy nieraz wzorami dla naprężeń ukośnych w belkach zginanych i które stosujemy do belek dowolnie podpartych.

W tych samych warunkach dla największego naprężenia stycznego otrzymujemy:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_0^2 + \sigma_x^2} \quad (281)$$

Dla należytego zobrazowania rozkładu wszelkiego rodzaju naprężeń w różnych punktach belki uciekamy się do tak zwanych linii jednakowych naprężeń i linii izostatycznych.



Rys. 159.