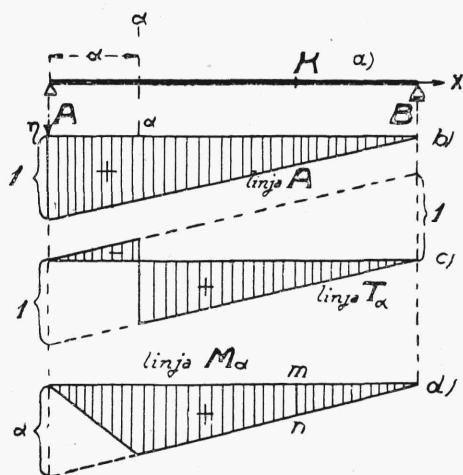


## 7. Linie wpływowe belek swobodnie podpartych.

Linia wpływowa momentu zginającego jest to wykres, wyrażający zależność między momentem, powstającym w danym przekroju belki pod działaniem ciężaru ruchomego równego jednostce (np. 1 tonnie), a położeniem tego ciężaru na belce.

Analogiczne określenie stosuje się do linii wpływowej siły poprzecznej w danym przekroju belki, do reakcji podpory i do innych wielkości, zależnych od obciążenia belki.



Rys. 80.

Na rys. 80 przedstawione są kolejno linie wpływowe dla reakcji prawej podpory ( $A$ ), dla siły poprzecznej ( $T_\alpha$ ) w przekroju belki  $\alpha\alpha$  oraz dla momentu zginającego ( $M_\alpha$ ) w tym samym przekroju.

Linie te przedstawiamy w osiach współrzędnych  $Ax$  i  $A\eta$ , gdzie  $x$  oznacza odległości ciężaru 1 od podpory  $A$  belki, zaś  $\eta$  rzędne linii wpływowych. Jeżeli ciężar równy 1 stoi np. na belce w punkcie  $K$ , wówczas rzędna  $\overline{mn}$  na linii wpływowej momentów, odpowiadająca temu punktowi, równa się momentowi, wywołanemu przez ciężar 1 w przekroju  $\alpha\alpha$  czyli, że  $M_\alpha = mn$ .

To samo dotyczy i pozostałych linii wpływowych. Jeżeli w punkcie  $K$  na belce stoi nie ciężar 1, lecz ciężar  $P$ , wówczas, w myśl zasady superpozycji, moment  $M_\alpha = P \cdot mn$ .

W razie szeregu ciężarów na belce, w myśl tej samej zasady, mamy, że

$$M_\alpha = P_1 \cdot \overline{mn} + P_2 \cdot \overline{m'n'} + \dots \quad (94)$$

gdzie  $\overline{mn}$ ,  $\overline{m'n'}$  i t. d. są to rzędne linii wpływowej momentów, odpowiadające punktom zaczepienia sił  $P_1$ ,  $P_2$  i t. d. Analogiczne wzory ustawić możemy również i dla siły poprzecznej, reakcji i t. p.

Wymiar, któremu odpowiadają rzędne linii wpływowej, równa się w ten sposób wymiarowi wielkości, dla której linia wpływowa została sporządzona, podzielonemu przez jednostkę ciężaru. A więc np. rzędne linii wpływowej dla momentu zginającego mają wymiar linjowy, dla siły poprzecznej wymiar zerowy i t. p.

Mając wykresy linii wpływowych dla  $M_\alpha$ ,  $T_\alpha$  i t. d. możemy, opierając się na wzorze (94) i analogicznych, wyznaczyć każdą z tych wielkości



(tu  $A = \eta_A$ ), czyli dla wartości tej reakcji w zależności od położenia ciężaru ruchomego  $1$ :

$$\eta_A = 1 - \frac{x}{l} \quad (96)$$

Równanie (96) jest to równanie prostej, odcinającej na osi  $\eta$ -ów długość  $\eta_0 = 1$  i przechodzącej przez punkt  $x = l$ . Prosta  $ab$  (rys. 81b) przedstawia więc linię wpływową dla  $A$  w wypadku, gdy ciężar  $1$  t. stoi między  $A$  i  $B$ .

Gdy ciężar znajduje się między  $B$  a  $C$  wówczas, zamiast równania (96), otrzymujemy równanie:

$$\eta_A \cdot l + 1(x - l) = 0 \quad (96')$$

skąd dochodzimy do tego samego co wyżej równania (96). Prosta  $bc$  będąca linią wpływową  $A$  dla odcinka belki  $BC$  jest więc przedłużeniem prostej  $ab$ . Prosta  $abc$  jest zatem linią wpływową reakcji  $A$  dla całej belki  $AC$ .

Aby obliczyć linię wpływową dla reakcji prawej podpory  $B$  znajdujemy sumę momentów sił, działających na belkę względem lewej podpory  $A$ :

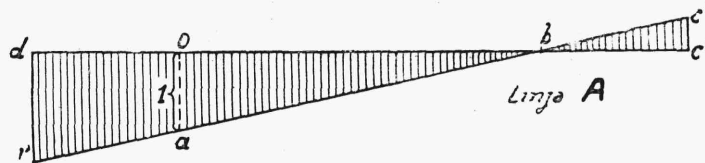
$$1 \cdot x - B \cdot l = 0 \quad (97)$$

Ponieważ dla siły  $1$  t  $B = \eta_B$ , więc

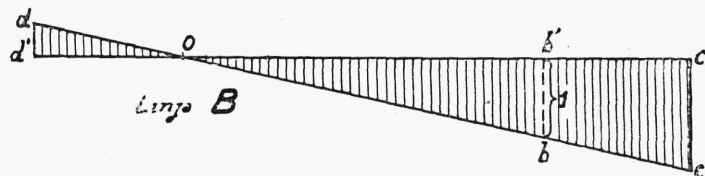
$$x - \eta_B \cdot l = 0 \quad \text{i} \quad \eta_B = \frac{x}{l} \quad (97')$$

Równanie (97') jest równaniem linii prostej, dającej, przy  $x = l$  rzędną  $\eta_B = 1$  (rys. 81c).

Gdybyśmy mieli belkę  $DABC$  o dwóch wspornikach  $AD$  i  $BC$ , wówczas linia wpływowa dla  $A$  lub  $B$  byłaby połączeniem podanych na rys. 81 b i c linii wpływowych dla  $A$  i  $B$ . Tłómaczy się to tem, że gdy ciężar  $1$  t. znajduje się między  $A$  i  $C$ , to wspornik  $AD$ , jako nieobciążony, nie odgrywa żadnej roli; to samo ma miejsce ze wspornikiem  $BC$ , gdy ciężar znajduje się między  $D$  i  $B$  (rys. 82 i 83).



Rys. 82.



Rys. 83.

Linje wpływowe dla sił poprzecznych obliczamy w sposób następujący (rys. 84).

Bierzemy pod uwagę, że gdy ciężar  $1$  t. znajduje się między prawą podporą  $B$  a dowolnym przekrojem  $\alpha\alpha$  wówczas lewa siła poprzeczna dla tego przekroju równa się reakcji podpory  $A$ , a jej linja wpływowa odpowiada równaniu:

$$\eta_A = 1 - \frac{x}{l} \quad (98)$$

jest to równanie prostej  $ab$ , czyli linja wpływowa dla reakcji  $A$  (rys. 84b).

O ile ciężar  $1$  znajduje się na lewej części belki wówczas

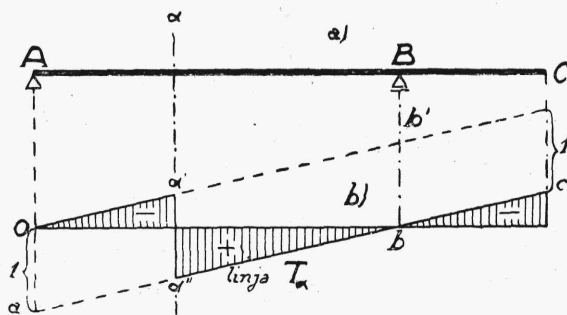
$$T_\alpha = A - 1$$

Wobec tego dla odcinka  $A\alpha$  rzędną linii wpływowej dla siły poprzecznej znajdziemy, odejmując od rzędnych  $\eta_A$  rzędną równą  $1$ , czyli że będziemy mieli równanie:

$$\bar{\eta}_T = \eta_A - 1 = 1 - \frac{x}{l} - 1 = -\frac{x}{l} \quad (99)$$

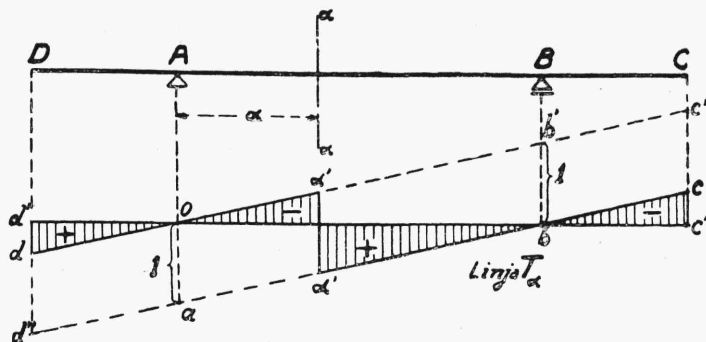
Jest to równanie prostej  $Ob'$  równoległej do prostej  $ab$ .

Z powyższego wynika, że na odcinku  $A\alpha$  linja wpływowa siły poprzecznej  $T_\alpha$  pokrywa się z prostą  $Ob'$  a na odcinku  $\alpha B$  z prostą  $ab$ , czyli że na przestrzeni  $AB$  ma ona kształt wieloboku  $Oa'a''b$ , a na całej długości belki kształt  $Oa'a''bc$ .



Rys. 84.

Gdyby belka  $AB$  miała drugi wspornik  $AD$ , to linja wpływowa dla  $T_\alpha$  miałaby kształt przedstawiony na rys. 85.



Rys. 85.

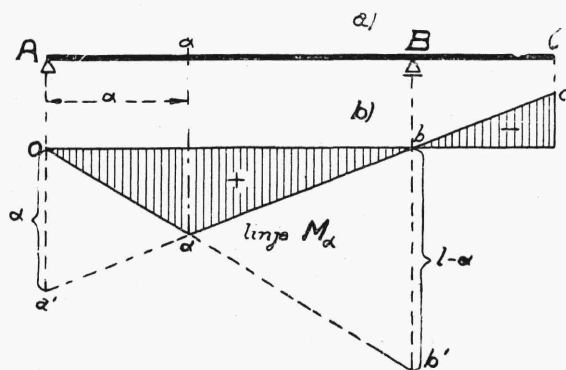
Linję wpływową dla momentu zginającego w przekroju  $\alpha\alpha$  otrzymujemy z równania:

$$M_{\alpha} = A \cdot \alpha \quad (100)$$

o ile ciężar  $1t$  znajduje się między  $\alpha$  i  $C$ , i z równania:

$$M_{\alpha} = A \cdot \alpha - l (\alpha - x) \quad (101)$$

o ile ciężar znajduje się między  $A$  i  $\alpha$  (rys. 86).



Rys. 86.

Ponieważ zmienna rzędna linii  $A$  jest  $\eta_A$ , więc wzory dla  $\eta_M$  przybierają postać następującą:

$$\eta_M = \eta_A \cdot \alpha = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \alpha = \alpha - x \cdot \frac{\alpha}{l} \quad (102)$$

o ile ciężar  $1t$  znajduje się na odcinku  $\alpha C$  i postać następującą:

$$\eta_M = \eta_A \cdot \alpha - l (\alpha - x) = \alpha - x \cdot \frac{\alpha}{l} - l (\alpha - x) = x \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) \quad (103)$$

o ile ciężar  $1t$  znajduje się na odcinku  $A\alpha$ .

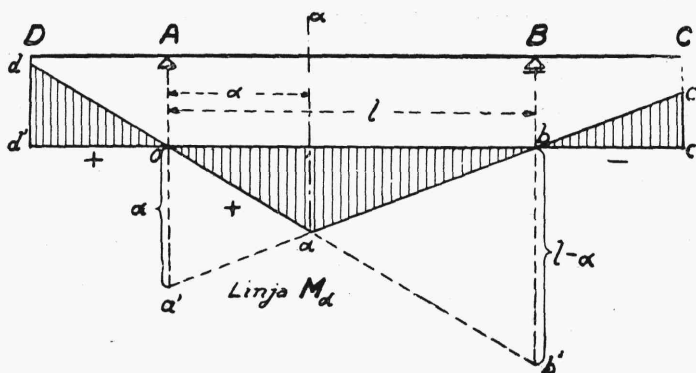
Równanie (102) jest równaniem prostej, odcinającej na osi  $\eta$  długość  $\alpha$  i przechodzącej przez punkt  $x = l, \eta = 0$ . Równanie (103) jest równaniem prostej, przechodzącej przez początek współrzędnych ( $x=0, \eta=0$ ) i przez punkt o współrzędnych  $x = l, \eta = l - \alpha$ .

Oba równania mają w punkcie  $x = \alpha$  wspólną rzędną:

$$\eta = \alpha - \frac{\alpha^2}{l} = \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{l} \right)$$

wobec czego proste  $Ob'$  i  $a'bc$  (rys. 86b) przecinają się w tym właśnie punkcie.

Linia  $M_\alpha$  składa się więc z odcinka  $Oa$  i odcinka  $abc$ . Aby ją otrzymać odkładamy przedewszystkiem na pionie odpowiadającym podporze  $A$  odcinek  $\alpha$  równy odległości danego przekroju  $\alpha\alpha$  od podpory  $A$ , następnie odkładamy odcinek  $l - \alpha$  na pionie odpowiadającym podporze  $B$ , poczem łączymy punkty  $O$  z  $b'$  oraz  $a'$  z  $b$ . Trójkąt  $Oab$  będzie poszukiwaną linią wpływową dla odcinka belki  $AB$ . Nad wspornikiem linia wpływowa będzie przedłużeniem prostej  $aB$ . Dla belki dwuspornikowej linia wpływowa dla momentu zginającego przedstawiona jest na rys. 87.



Rys. 87.

W razie obciążenia węzłowego linie wpływowe różnią się kształtem od poprzednio przedstawionych.

Gdy chodzi o linie wpływowe dla danego przekroju belki  $\alpha\alpha$ , zawartego między węzłami  $m$  i  $n$ , wówczas węzły te rzutujemy na linie, odpowiadające temu przekrojowi przy obciążeniu bezpośrednim, po-

czem rzuty łączymy ze sobą prostymi (rys. 88). W przedziale między dwoma węzłami linie wpływowe mają więc przebieg prostoliniowy.

Uzasadnimy to.

Ciążar  $I$ , znajdujący się na belce drugorzędnej  $mn$  (rys. 88a) w odległości  $\xi$  od  $m$ , rozkłada się na dwie podpory tej belki, jako na siły:

$$R_m = I \cdot \frac{\lambda - \xi}{\lambda} \quad \text{i} \quad R_n = I \cdot \frac{\xi}{\lambda} \quad (104)$$

Siły te stanowią, przy obciążeniu węzłowym równym  $I$ , właściwe obciążenie belki  $AB$ .

O ile przez  $\eta_m$  i  $\eta_n$  oznaczymy rzędne jakiejkolwiek linii wpływowej dla punktów  $m$  i  $n$  przy obciążeniu bezpośrednim a przez  $\eta_\xi$  odpowiednią rzędną pod ciężarem  $I$ , wówczas musi mieć miejsce zależność:

$$I \cdot \eta_\xi = \eta_m \cdot \frac{\lambda - \xi}{\lambda} + \eta_n \cdot \frac{\xi}{\lambda} \quad (105)$$

która wynika z równoznaczności

dwóch układów sił, mianowicie, z jednej strony, siły  $I$ , zaczepionej w odległości  $\xi$  od punktu  $m$  oraz, z drugiej strony, sił:

$$I \frac{\lambda - \xi}{\lambda} \quad \text{i} \quad I \frac{\xi}{\lambda}$$

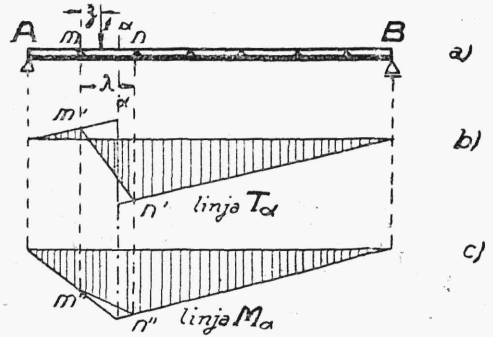
zaczepionych w punktach  $m$  i  $n$ .

Równanie (105) po redukcji przybiera postać następującą:

$$\eta_\xi = \eta_m + \xi \cdot \frac{1}{\lambda} (\eta_n - \eta_m) \quad (106)$$

skąd wynika, że między punktami  $m$  i  $n$  linia wpływowa ma kształt prostej. Widzimy to na rys. 88b i c, przedstawiających linie wpływowe dla siły poprzecznej i momentu zginającego w przekroju  $\alpha\alpha$ .

Jak widzimy, zachodzi tu pewna analogia między wyprowadzeniem linii wpływowych dla obciążenia węzłowego z odpowiednich linii dla obciążenia bezpośredniego, a między sporządzaniem wykresów momentów zginających i sił poprzecznych przy obciążeniu węzłowym na podstawie odpowiednich wykresów przy obciążeniu bezpośrednim.



Rys. 88.