

$$\begin{aligned}\tau_T &= \frac{T_1}{a} = \frac{2r^2\pi q}{2a\pi} \cdot \frac{d[(1 - \cos\varphi) \operatorname{ctg}\varphi]}{rd\varphi} = \\ &= \frac{-1 + 2\cos\varphi - \cos^3\varphi}{a\sin^2\varphi} qr = \frac{\cos 2\varphi + \cos^3\varphi}{a(1 + \cos\varphi)^2} \cdot qr = \\ &= \frac{q(r^2 - 3ry + y^2)}{a(2r - y)} \quad (1101)\end{aligned}$$

Wzory (1100) i (1101) dają nam dla szczególnych wartości kąta  $\varphi$  wartości następujące:

$$\begin{aligned}\text{przy } \varphi = 0 \quad \text{mamy, że: } \sigma_N &= \sigma_T = \frac{qr}{2a} \text{ (ściskanie)} \\ \text{" } \varphi = 90^\circ \quad \text{" } \sigma_N &= \frac{qr}{a} \text{ (ściskanie)} \\ \text{" } \text{" } \text{" } \sigma_T &= -\frac{qr}{a} \text{ (wyciąganie)} \\ \text{" } \varphi = 51^\circ 49' \quad \sigma_T &= 0, \text{ co odpowiada zmianie znaku.}\end{aligned}$$

Obliczenie kopuł, jako cienkościennych, może być niekiedy stosowane i do kopuł żelazobetonowych, pod warunkiem jednak, że dopuszczone naprężenia nie będą przekraczały połowy naprężeń dopuszczalnych dla płaskich konstrukcyj żelazobetonowych i że uzbrojenie kopuł nie będzie wynosić mniej, niż 0,6‰ przekroju <sup>1)</sup>.

## 7. Wyznaczenie momentów zginających w kopułach kulistych.

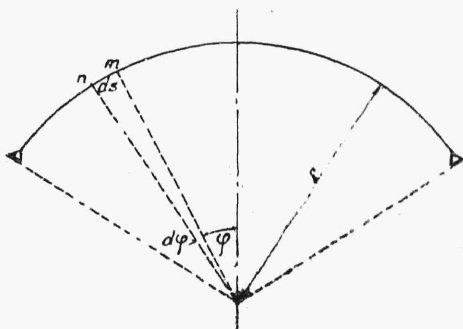
W razie, gdy mamy do czynienia z kopułą kulistą, naprężenia zginające mogą być w niej wyznaczone drogą kolejnych przybliżeń, z których za pierwsze przyjmujemy rezultat obliczenia podanego w paragrafie poprzednim. Aby zadanie sobie ułatwić, zakładamy, że grubość kopuły jest stała i mała w porównaniu do promienia kopuły i że kopuła jest przesuwana wzdłuż całego obwodu podparcia (rys. 472).

Wycinamy nieskończenie małą część kopuły  $ABCD$  (rys. 473) za pomocą dwóch płaszczyzn południkowych, nachylonych względem siebie pod nieskończenie małym kątem  $d\theta$  (rys. 474) i za pomocą dwóch powierzchni stożkowych, nachylonych względem siebie o kąt  $d\varphi$  (rys. 472 i 475).

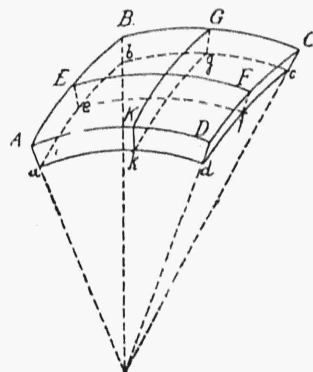
<sup>1)</sup> F. Emperger „Handbuch f. Eisenbetonbau“ V Bd. III Aufl. str. 134.

Przyjmujemy, że przekroje  $ADla$ ,  $DCcd$  i t.d., ograniczające wyciętą część kopuły, nie ulegają zwężeniu po jej odkształceniu się, lecz pozostają płaskimi i mogą się tylko nachylać względem swego położenia pierwotnego.

Przedstawiamy na rys. 475 południkowy środkowy przekrój  $GKkg$  omówionej wyżej części kopuły i ustalamy zależność między odkształceniami tego przekroju a naprężeniami południkowymi, normalnymi do płaszczyzn  $Kk$  i  $Gg$ . Długość  $ML$  środkowego włókna odcinka  $KGgk$  oznaczamy przez  $ds$ , zaś długość włókna  $M'L'$  odsuniętego od tamtego o  $z$  ozna-



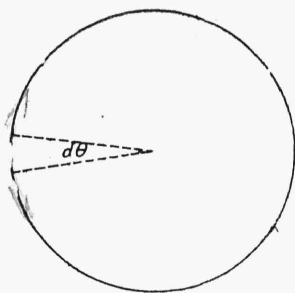
Rys. 472.



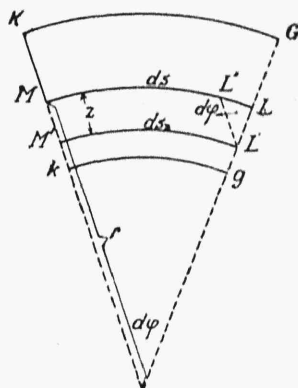
Rys. 473.

czamy przez  $ds$ . Przeprowadzamy prostą  $L'L''$  równoległą do  $MM'$  i ustalamy zależność następującą:

$$\frac{ds - ds_z}{z} = \frac{ds}{r} \quad (1102)$$



Rys. 474.



Rys. 475.

z której wynika, że

$$ds_z = ds \left( 1 - \frac{z}{r} \right) \quad (1103)$$

O ileby przy odkształceniu kopuły długość odcinka osiowego  $ML$  pozostawała bez zmiany, wówczas dla długości włókna  $ML'$ , po odkształceniu, otrzymalibyśmy analogicznie do wzoru (1103) wzór następujący:

$$ds_z' = ds \left( 1 - \frac{z}{\rho'} \right) \quad (1104)$$

gdzie  $\rho'$  oznacza promień krzywizny w płaszczyźnie południkowej odcinka  $ML$  po odkształceniu.

W tem samym założeniu otrzymalibyśmy dla jednostkowego wydłużenia (lub skrótu) włókna  $ML'$  wzór następujący:

$$\varepsilon_z' = \frac{ds_z' - ds_z}{ds_z} = - \frac{z}{1 - \frac{z}{r}} \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{r} \right) \quad (1105)$$

Jeżeli jednak oś  $ML$  ulega wydłużeniu podczas odkształcenia kopuły, przyczem jej wydłużenie jednostkowe przy jednokierunkowym (południkowym) działaniu sił wewnętrznych oznaczmy przez  $\varepsilon'$ , wówczas we wzory (1104) oraz (1105) powinniśmy wstawić, zamiast wielkości  $ds$ , wielkość  $ds(1 + \varepsilon')$ , wobec czego wzór (1104) ulec tu musi uzupełnieniu i wobec czego otrzymamy, że

$$\varepsilon_z' = \frac{ds_z' - ds_z}{ds_z} = \frac{\varepsilon'}{1 - \frac{z}{r}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{r}} \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} \right) \quad (1106)$$

Ponieważ przyjęliśmy, że grubość kopuły jest mała w porównaniu z promieniem, pomijamy więc we wzorze (1106) ułamek  $\frac{z}{r}$ . Suma

$\left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} \right)$  jest przyrostem krzywizny przekroju południkowego w danym miejscu kopuły.

Wprowadzamy oznaczenie:

$$\delta' = \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon'}{\rho'}$$

Mamy więc, że

$$\varepsilon_z' = \varepsilon' - z \cdot \delta' \quad (1107)$$

Stosując rozumowanie, analogiczne do poprzedniego, do przekroju środkowego *EFfe* rozpatrywanej części kopuły, dochodzimy do wzoru:

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{\varepsilon} - z \bar{\delta} \quad (1108)$$

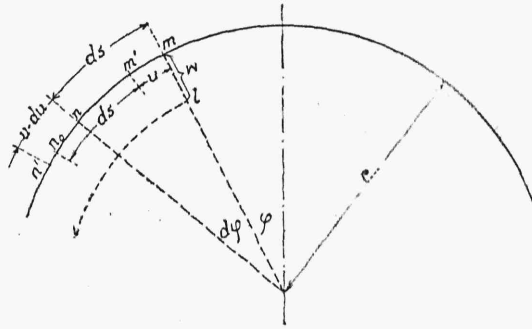
gdzie  $\bar{\varepsilon}$  oznacza wydłużenie jednostkowe środkowego włókna przekroju *EFfe* w kierunku stycznym do obwodu równoleżnika, a  $\bar{\varepsilon}_z$  odpowiednie wydłużenie włókna odsuniętego o  $z$  od włókna środkowego.  $\bar{\delta}$  oznacza tu przyrost krzywizny osi przekroju *EFfe* (drugiej krzywizny głównej elementu *ABCD*) po odkształceniu się kopuły.

Zależność między jednostkowym wydłużeniem  $\varepsilon'$  środkowej powierzchni kopuły w kierunku południka a przesunięciami poszczególnych punktów kopuły w płaszczyźnie południkowej (por. z odpowiednim zadaniem dla płyt w par. 1 niniejszego rozdziału) ustalamy w ten sam sposób, jakgdybyśmy to robili dla odcinka płaskiego pierścienia sprężystego, odkształconego w płaszczyźnie pierścienia <sup>1)</sup>.

Niech będą  $u$  i  $w$  przesunięcia punktu  $m$  pierścienia kołowego odpowiednio w kierunku stycznym i normalnym do obwodu pierścienia. Rozpatrujemy wydłużenie jednostkowe  $\varepsilon'$ , jako sumę

$$\varepsilon' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' \quad (1109)$$

gdzie  $\varepsilon_1'$  oznacza szczególną wartość tego wydłużenia w założeniu, że  $w = 0$ , zaś  $\varepsilon_2'$  odpowiednią wartość jego przy  $u = 0$  (rys. 476).



Rys. 476.

Bierzemy na osi pierścienia nieskończenie mały odcinek  $mn = ds$ . Na skutek odkształcenia się pierścienia punkty  $m$  i  $n$  zajmą odpowiednio położenia  $m'$  i  $n'$ , przyczem długość odcinka  $mn$  ulegnie pewnemu przyrostowi równemu  $n'n_0 = \varepsilon_1' ds$ . Skoro przez  $u$  oznaczamy przesunięcie się

<sup>1)</sup> Vid. S. Timoszenko „Kurs teorii uprugosti”, 1916, II. str. 400.

$mm'$  punktu  $m$ , to przesunięcie się punktu  $n$  będzie równe  $nn' = u + du$ . Wynika z tego, że jednostkowe wydłużenie  $\varepsilon_1'$  będzie równe

$$\varepsilon_1' = \frac{nn' - mm'}{mn} = \frac{u + du - u}{ds} = \frac{du}{ds} = \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{d\varphi} \quad (1110)$$

gdyż  $ds = r d\varphi$ .

Przesunięcie punktu  $m$  w kierunku promienia powoduje zmniejszenie tego ostatniego do wielkości  $r - w$ , wobec czego długość całego pierścienia kołowego ulega skrótovi równemu  $2\pi r - 2\pi(r - w)$ ; stąd otrzymujemy, że

$$\varepsilon_2' = - \frac{2\pi r - 2\pi(r - w)}{2\pi r} = - \frac{w}{r} \quad (1111)$$

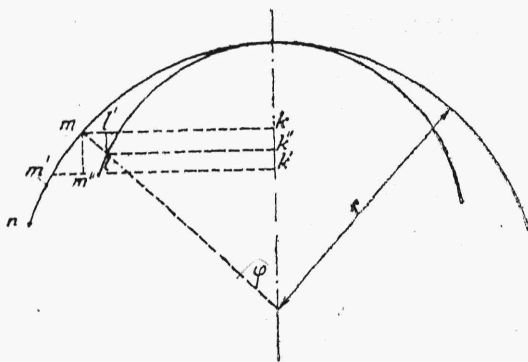
Wreszcie dla całkowitego wydłużenia jednostkowego przekroju południkowego kopuły otrzymujemy ze wzoru (1109), że:

$$\varepsilon' = \frac{1}{r} \left( \frac{du}{d\varphi} - w \right) \quad (1112)$$

Wydłużenie jednostkowe przekroju równoleżnikowego rozpatrujemy, jako sumę

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 \quad (1113)$$

analogiczną do sumy (1109).



Rys. 477.

Długość promienia równoleżnika równa się (rys. 477):

$$mk = r \sin \varphi \quad (1114)$$

Wskutek przesunięcia się punktu  $m$  do punktu  $m'$  (o długość  $u$ ) promień równoleżnika wzrośnie i będzie się równał:

$$m'k' = r \sin \varphi + u \cos \varphi \quad (1115)$$

gdzie odcinek poziomy  $u \cos \varphi = m'm''$  stanowi wydłużenie się promienia. Mamy więc, że

$$\varepsilon_1 = \frac{2\pi(r \sin \varphi + u \cos \varphi) - 2\pi r \sin \varphi}{2\pi r \sin \varphi} = \frac{u}{r} \operatorname{ctg} \varphi \quad (1116)$$

Jeżeli odcinek  $\overline{ml} = w$  oznacza przesunięcie punktu  $m$  w kierunku promienia to  $\overline{ml'} = w \sin \varphi$  wyrazi odpowiednie wydłużenie promienia równoleżnika. Otrzymamy stąd:

$$\varepsilon_2 = - \frac{2\pi(r \sin \varphi + w \sin \varphi) - 2\pi r \sin \varphi}{2\pi r \sin \varphi} = - \frac{w}{r} \quad (1117)$$

Wreszcie dla wydłużenia jednostkowego pierścienia równoleżnikowego otrzymujemy wzór następujący:

$$\varepsilon = \frac{1}{r} (u \operatorname{ctg} \varphi - w) \quad (1118)$$

Przyrost krzywizny  $\mathfrak{H}'$  przekroju południkowego kopuły kulistej obliczamy, jako przyrost krzywizny pierścienia kołowego (rys. 478). Krzywizna takiego pierścienia przed odkształceniem równa się:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (1119)$$

gdyż odcinek  $mn$  pierścienia równa się  $mn = ds = r d\varphi$ .

Krzywizna pierścienia, po odkształceniu, w tym samym punkcie  $m$  wyniesie:

$$\frac{1}{r'} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds} \quad (1120)$$

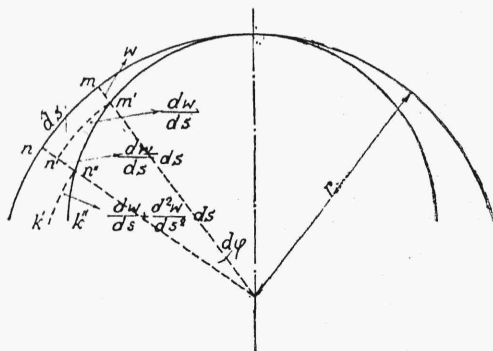
gdyż podczas odkształcenia kąt  $d\varphi$  dozna tu przyrostu  $\Delta d\varphi$  a łuk  $ds$  przyrostu  $\Delta ds$ .

Wydłużenie  $\Delta ds$  odcinka pierścienia  $mn = ds$  wywołane przez przesunięcie  $w$ , skierowane wzdłuż promienia, wynosi, na podstawie wzoru (1111):

$$\Delta ds = \varepsilon'_2 ds = - \frac{w}{r} ds \quad (1121)$$

Aby wyznaczyć przyrost  $\Delta d\varphi$  kąta  $d\varphi$ , rozpatrujemy nieskończenie mały trójkąt  $n'm'n''$  (rys. 478). Ponieważ w trójkącie tym bok  $n'n'' = dw$  (tu odcinek  $n'm'$  jest równoległy do odcinka  $nm$ ), więc kąt  $n'm'n''$  równa się  $\frac{dw}{ds}$ . Ponieważ wielkość kąta  $n'm'n''$  zależna jest od położenia punktu  $m$ , więc kąt  $k'n''k''$  (tu odcinek  $k'n''$  jest równoległy do odcinka  $nm$ ) równać się musi  $\frac{dw}{ds} + \Delta \frac{dw}{ds}$ , gdzie

$$\Delta \frac{dw}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{dw}{ds} \right] ds = \frac{d^2w}{ds^2} ds$$



Rys. 478.

Wobec tego, że kąt  $\Delta d\varphi = \sphericalangle k'n''k'' - \sphericalangle n'm'n''$ , mamy, że

$$\Delta d\varphi = \frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} ds - \frac{dw}{ds} = \frac{d^2w}{ds^2} ds \quad (1121')$$

Wstawiając wzory (1121) i (1121') we wzór (1120), otrzymujemy po pominięciu małych wielkości wyższego rzędu:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\varphi + \frac{d^2w}{ds^2} ds}{ds \left(1 - \frac{w}{r}\right)} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{w}{r} + \frac{d^2w}{ds^2} \quad (1122)$$

Wreszcie dla przyrostu krzywizny południkowego przekroju kopuły dochodzimy (wobec  $\rho' r = \infty r^2$ ) do wyrażenia następującego:

$$\begin{aligned} \delta' &= \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon'}{\rho'} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{w}{r} + \frac{d^2w}{ds^2} - \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{dw}{d\varphi} - w \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ \frac{dw}{d\varphi} + \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right] \end{aligned} \quad (1123)$$



$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} + \frac{\bar{\varepsilon}}{\rho} = \frac{1}{\rho \cdot r} (r - \bar{\rho}) + \frac{1}{r^2} (u \operatorname{ctg} \varphi - w) = \\ &= \frac{1}{\rho r} \left( w + \frac{dw}{d\varphi} \cdot \operatorname{ctg} \varphi \right) + \frac{1}{r^2} (u \operatorname{ctg} \varphi - w) = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{r^2} \left( \frac{dw}{d\varphi} + u \right)\end{aligned}\quad (1125)$$

Rozpatrujemy w dalszym ciągu nieskończenie małą część kopuły  $ABCD$ , jako prostopadłościan, podległy dwukierunkowemu działaniu sił, omówiony w rozdz. V.2. Stosując tu więc wzory (135) i (136), otrzymujemy, że naprężenia południkowe  $\sigma'$  i równoleżnikowe  $\bar{\sigma}$  równe są odpowiednio:

$$\begin{aligned}\sigma' &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ (\varepsilon' - z \cdot \delta') + \mu (\bar{\varepsilon} - z \cdot \bar{\delta}) \right] = \\ &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \varepsilon' + \mu \bar{\varepsilon} - z (\delta' + \mu \bar{\delta}) \right]\end{aligned}\quad (1126)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \bar{\varepsilon} + \mu \varepsilon' - z (\bar{\delta} + \mu \delta') \right]\quad (1127)$$

Stąd dla sił normalnych  $N_1$  i  $T_1$ , działających odpowiednio na jednostkę bieżącą przekroju równoleżnikowego (normalnego) i południkowego, otrzymujemy (zamiast wzorów 1093 — 1098 poprzedniego paragrafu):

$$N_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sigma' dz = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon' + \mu \bar{\varepsilon}) \cdot a\quad (1128)$$

$$T_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \bar{\sigma} dz = \frac{E}{1 - \mu^2} (\bar{\varepsilon} + \mu \varepsilon') \cdot a\quad (1129)$$

Odpowiednio do tych ostatnich wzorów, momenty sił wewnętrznych, działających na boczne ściany nieskończenie małego elementu  $ABCD$  (rys. 473) wyrażają się na 1 bież. wzorami następującymi:

$$M' = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sigma' z dz = - \frac{E a^3}{12 (1 - \mu^2)} (\delta' + \mu \bar{\delta})\quad (1130)$$

$$M'' = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sigma z dz = - \frac{Ea^3}{12(1-\nu^2)} (\bar{\delta} + \nu \cdot \delta') \quad (1131)$$

Ostatecznie, bieg obliczenia kopuły kulistej jest następujący:

Ze wzorów (1093)–(1098) poprzedniego paragrafu wyznaczamy w pewnym punkcie kopuły siły  $N_1$  i  $T_1$ , odpowiadające założeniu, że naprężenia normalne są równomiernie rozłożone na całej grubości kopuły. Siły  $N_1$  i  $T_1$  są naogół prostymi funkcjami kąta  $\varphi$ . Wstawiając w ten sposób obliczone wielkości  $N_1$  i  $T_1$  we wzory (1126) i (1127), rozwiązujemy otrzymane stąd równania względem wydłużeń jednostkowych  $\varepsilon'$  i  $\bar{\varepsilon}$ , wyobrażając je sobie, jako funkcje  $\varphi$ . Wstawiając następnie wielkości te w wyprowadzone wyżej dla wydłużeń jednostkowych równania (1112) i (1118), rozwiązujemy te ostatnie względem przesunięć  $u$  i  $w$ . W ten sposób dochodzimy do równania:

$$\frac{du}{d\varphi} - u \operatorname{ctg} \varphi - r(\varepsilon' - \bar{\varepsilon}) = 0 \quad (1132)$$

które jest równaniem różniczkowym typu:

$$f_1(x)y' + f_2(x)y + f_3(x) = 0$$

i doprowadza nas do następującej całki ogólnej:

$$u = r \sin \varphi \left( C + \int \frac{\varepsilon' - \bar{\varepsilon}}{\sin \varphi} d\varphi \right) \quad (1133)$$

Dla przesunięcia  $w$  znajdujemy, odpowiednio do tego, na podstawie równania (1118) wyrażenie następujące:

$$w = -r \left[ \bar{\varepsilon} - \cos \varphi \left( C + \int \frac{\varepsilon' - \bar{\varepsilon}}{\sin \varphi} d\varphi \right) \right] \quad (1134)$$

Znając przesunięcia  $u$  i  $w$ , możemy na podstawie wzorów (1123) i (1125) wyznaczyć przyrosty krzywizny  $\delta'$  i  $\bar{\delta}$  a na podstawie wzorów (1130) i (1131) momenty zginające w dowolnym punkcie kopuły.

Odpowiednie naprężenia normalne w poszczególnych punktach kopuły wyznaczamy ze zwykłych wzorów (por. rozdz. VII, 1)

$$\sigma' = \frac{6M'}{a^2} \quad \bar{\sigma} = \frac{6M''}{a^2} \quad (1135)$$

W szczególnym wypadku, gdy chodzi o kopułę obciążoną wyłącznie ciężarem własnym, mamy, że:

$$M' = M'' = \frac{qa^3}{12} \cdot \frac{(1 + \mu)(2 + \mu)}{1 - \mu^2} \cos \varphi \quad (1136)$$

gdzie  $q$  oznacza ciężar własny kopuły, przypadający na jednostkę jej powierzchni.

## 8. Kopuły grubościennie.

Kopuły grubościennie obliczać możemy sposobem równowagi granicznej z temi samemi jednak zastrzeżeniami, które były podnoszone przy obliczaniu łuków cylindrycznych (por. rozdz. XIII, 2).

Przypuścmy, iż mamy do czynienia z kopułą o kształcie bryły obrotowej, obciążoną w sposób symetryczny.

Wycinamy część kopuły  $nOn$  (łuk elementarny) płaszczyznami południkowemi i dzielimy ją na kliny powierzchniami stożkowemi. Rys. 480 przedstawia wycinek południkowy w widoku i w planie.

Na płaszczyzny szczytowe (południkowe) poszczególnych wycinków  $nOn$  kopuły działają siły  $C$ , reakcje wycinków sąsiednich. Siły te są prostopadłe do płaszczyzn południkowych, a więc poziome. Wypadkowa ich  $H$  wywołuje równą sobie poziomą siłę  $H$  w zworniku  $O$  danego wycinka  $nOn$ . Siłom  $C$ , działającym na część  $Oi$  wycinka południkowego  $nOn$ , odpowiada w zworniku siła pozioma  $H_i$ .

W ten sposób każda część  $Oi$  (rys. 480) wycinka  $nOn$  znajduje się w równowadze pod działaniem sił następujących:

- 1) pod działaniem siły  $H_i$  zaczepionej poziomo w zworniku,
- 2) pod działaniem sił zewnętrznych  $P_1, P_2, \dots, P_i$  zaczepionych do kopuły na powierzchni wycinka  $nOn$  oraz jej ciężaru własnego,
- 3) pod działaniem reakcji  $R_i$  odcinka  $in$  na odcinek  $Oi$  łuku.

Doświadczenie uczy, iż w chwili zniszczenia kopuły rozwierają się od strony wewnętrznej wszystkie przekroje  $i$  położone między zwornikiem a pewnym przekrojem pośrednim  $m$ . Tam, gdzie to ma miejsce, krzywa ciśnienia w chwili zniszczenia kopuły w górnej jej części musi pokrywać się z krzywą  $O'i'n'$ , ograniczającą od góry środkową trzecią część wycinka  $nOn$ .

Przedewszystkiem sprawdzamy, na jakiej przestrzeni może mieć miejsce podobne pokrywanie się tych krzywych oraz rozwarcie się kopuły.

Wykreślamy więc wielobok sił zewnętrznych, działających na kopułę. Są to siły  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$ , odpowiadające poszczególnym klinom elementarnego łuku  $nOn$ , a wielobok ich tworzy linię prostą.

Znajdujemy trójkąt sił, działających na odcinek  $Oi$  elementarnego łuku (wycinka południkowego  $nOn$ ), t j. sił  $R_i, H_i$  oraz sumy sił  $P_1, P_2, \dots, P_i$ .