

ROZDZIAŁ XVI.

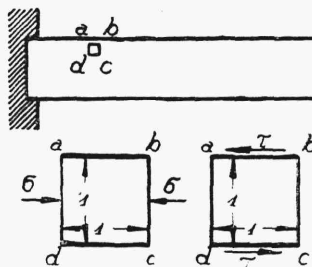
Energja sprężysta.¹⁾

1. Jednostkowa energja sprężysta.

Podczas gdy ciało sprężyste ulega odkształceniu, każda jego cząstka przesuwana się względem swego pierwotnego położenia, przyczem działające na nią siły wewnętrzne wykonywują pewną pracę. Nagromadza się w ten sposób pewna ilość energii, zwanej energją sprężystą. O ile część objętości ciała ma kształt geometryczny sześcianu o wymiarze 1, nagromadzoną energję działających na nią sił wewnętrznych nazywamy jednostkową energją sprężystą. Dla energii sprężystej bywają też stosowane nazwy: praca sprężysta, praca odkształcenia, potencjał sił sprężystych i inne.

Obliczymy energję nagromadzoną w sześcianie $abcd$ o wymiarach 1 pod działaniem sił wewnętrznych, mających kierunek strzałek (jednostkowa energja sprężysta, rys. 396). Wydłużenie jednostkowe sześcianu oznaczamy przez ϵ , zaś naprężenie normalne, działające na ściany ad i bc , przez σ .

Jeżeli ϵ jest to jednostkowe wydłużenie danego materiału, to całkowite wydłużenie sześcianu $abcd$, mającego długość 1, w kierunku strzałek, wyniesie również ϵ .



Rys. 396.

¹⁾ Obszerniejsze rozważania w języku polskim na temat teorii energii sprężystej i jej zastosowań znaleźć można w pracach: prof. dr. inż. M. Huber „Kryteria stałości równowagi” 1925, prof. inż. L. Karasiński „Wytrzymałość Tworzyw” 1921.

Ponieważ wyobrażamy sobie, że naprężenia wzrastają w sposób ciągły i powolny od zera do pewnej wartości σ_0 , więc każdemu przyrostowi naprężenia σ odpowiadać tu będzie przyrost wydłużenia $d\varepsilon$ sześciannu i przyrost energii sprężystej równy $\sigma d\varepsilon$. Wynika stąd, że cała energia sprężysta, jaka się nagromadziła przy wzroście sił od zera do ostatecznej wartości σ_0 , (dalej znak przy σ_0 opuszczamy) wyniesie:

$$V' = \int_0^{\sigma_0} \sigma d\varepsilon \quad (716)$$

Wzór ten, wobec zależności $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, przybiera postać następującą:

$$V'_{\sigma} = \int \sigma \cdot \frac{d\sigma}{E} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (717)$$

Wzorowi (717) możemy nadać jeszcze dwie następujące formy:

$$V'_{\sigma} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (718)$$

$$V'_{\sigma} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{(\varepsilon \cdot E)^2}{2E} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 E \quad (719)$$

Jeżeli na sześciann działają naprężenia styczne τ (rys. 396), wówczas jednostkowa energia sprężysta równa się:

$$V'_{\tau} = \int \tau d\beta = \int \tau \frac{d\tau}{G} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (720)$$

Również i tu jednostkową energję sprężystą można przedstawić za pomocą wzorów analogicznych do (718) i (719), mianowicie, za pomocą wzorów:

$$V'_{\tau} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \beta = \frac{1}{2} \beta^2 G \quad (721)$$

Energja sprężysta w odniesieniu do nieskończenie małego prostopadłościanu o wymiarach dx , dy i dz wyniesie:

$$dV = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (722)$$

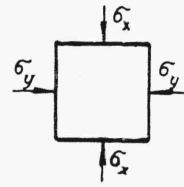
lub też, w razie, gdy jeden z wymiarów prostopadłościanu jest 1, (zadanie płaskie) będzie się równała:

$$dV = \frac{\sigma^2}{2E} dx \cdot dy \quad (723)$$

Wyobraźmy sobie w dalszym ciągu, że na sześcian o wymiarze 1 działają naprężenia normalne σ_x i σ_y w dwóch kierunkach (rys. 397). Wydłużenia jednostkowe równają się odpowiednio (vid. rozdz. V,2):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) \quad (724)$$

Wobec tego, że przy ciągnięciu i powolnym wzrastaniu sił, siła o każdej wartości l. l. σ_x wykonywa pracę na drodze równej $d\varepsilon_x$, a siła l. l. σ_y na drodze $d\varepsilon_y$, mamy tu, że



Rys. 397.

$$\begin{aligned} V'_1 &= \int \sigma_x d\varepsilon_x = \frac{1}{E} \int \sigma_x (d\sigma_x - \mu d\sigma_y) \\ V'_2 &= \int \sigma_y d\varepsilon_y = \frac{1}{E} \int \sigma_y (d\sigma_y - \mu d\sigma_x) \end{aligned} \quad (725)$$

Dodając do siebie oba wzory (725), otrzymujemy, że jednostkowa energia sprężysta przy dwukierunkowym stanie naprężenia wynosi:

$$\begin{aligned} V' &= V'_1 + V'_2 = \frac{1}{E} \int \left[\sigma_x (d\sigma_x - \mu d\sigma_y) + \sigma_y (d\sigma_y - \mu d\sigma_x) \right] = \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \mu \sigma_x \sigma_y \right) \end{aligned} \quad (726)$$

2. Energia sprężysta przy wyciąganiu i zginaniu.

Bierzemy pręt, obciążony siłą P (wyciągającą lub ściskającą).

W odległości x od przekroju utwierdzenia pręta wycinamy z niego płaszczyznami prostopadłymi do osi walec o wysokości nieskończenie małej dx i o podstawie A , równej polu danego przekroju pręta. Ponieważ