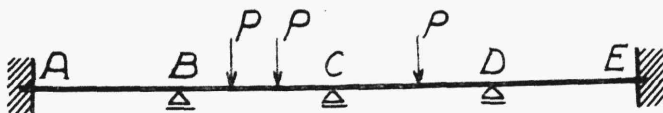


Ponieważ linie wpływowe zarówno belki ciągłej, jak i belki w dwóch końcach utwierdzonej mają kształt krzywoliniowy, niepodobna podać prostej wskazówki otrzymywania na podstawie tych linii największych wartości wszystkich tych wielkości, dla których zostały wyprowadzone. Najniekorzystniejsze obciążenie linii wpływowych musi tu się odbywać na podstawie prób kolejnych. Należy jednak mieć zawsze na uwadze, że obciążenie danej linii powinno dotyczyć tylko pół jednego i tego samego znaku, a największe ciężary powinny się skupiać około największych rzędnych.

## 7. Szczególne warunki podparcia i utwierdzenia belek statycznie niewyznaczalnych.

Wszystkie omówione wyżej sposoby obliczenia belek ciągłych dotyczą belek wspartych na podporach przegubowo-przesuwnych jednakowej wysokości, przyczem w razie sił zewnętrznych nieprostopadłych do osi belki, jedna z podpór powinna być nieprzesuwną. Obliczenie ulega



Rys 236.

pewnej zmianie, o ile końcowe podpory belki nie są przegubowe, lecz płaskie, czyli o ile końce belki są utwierdzone (rys. 236). W tym wypadku do wyznaczenia momentów podporowych belki nie wystarcza już równania trzech momentów, gdyż równanie to pozwala na wyznaczenie tylko  $n-2$  niewiadomych (przy liczbie podpór  $n$ ), podczas gdy liczba niewiadomych momentów stanie się tu równą liczbie podpór. Brakującą liczbę równań otrzymujemy z warunku utwierdzenia końców belki, czyli z warunku, że kąty obrotu końców belki, będące funkcjami momentów podporowych, muszą być równe zeru. Otrzymamy tą drogą dwa równania:

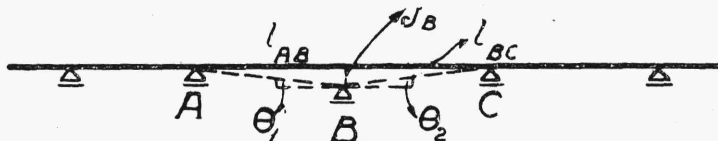
$$\varphi_A = 0 \quad \varphi_E = 0 \quad (428)$$

które uzupełniają liczbę równań, wynikających z twierdzenia o trzech momentach.

Przypuśćmy teraz, że w belce ciągłej o podporach przegubowo-przesuwnych (obciążenie prostopadłe do osi) jedna z podpór jest niższa od

innych t. j. że belka nie dotyka jej w stanie nieobciążonym, dotyka zaś dopiero po pewnym wygięciu się (rys. 237).

Gdyby belka była rozcięta nad podporami  $A, B, C$ , wówczas różnica wysokości podpory  $B$  i sąsiednich wywołałaby odchylenie prawego końcowego przekroju belki  $AB$  na prawo. Obciążenie wywołałoby tu obrót przeciwnie-



Rys. 237.

go znaku. Z tego wynika, że we wzorach (393) i (394) kąty  $\varphi_B^{AB}$  i  $\varphi_B^{BC}$  należy w danym wypadku zmniejszyć (a przy podniesieniu podpory  $B$  zwiększyć) odpowiednio o kąty  $\theta_1$  i  $\theta_2$  (rys 237), równe:

$$\theta_1 = \arctg \frac{f_B}{l_{AB}} = \approx \frac{f_B}{l_{AB}} \text{ i } \theta_2 = \arctg \frac{f_B}{l_{BC}} = \approx \frac{f_B}{l_{BC}} \quad (429)$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} \varphi_B^{AB} &= \frac{1}{EI} \left( \frac{M_B \cdot l_{AB}}{3} + \frac{M_A \cdot l_{AB}}{6} \right) + \varphi_{oB}^{AB} - \frac{f_B}{l_{AB}} \\ \varphi_B^{BC} &= -\frac{1}{EI} \left( \frac{M_B \cdot l_{BC}}{3} + \frac{M_C \cdot l_{BC}}{6} \right) - \varphi_{oB}^{BC} + \frac{f_B}{l_{BC}} \end{aligned}$$

Równanie trzech momentów przybierze tu postać następującą:

$$\begin{aligned} M_A \cdot l_{AB} + 2M_B(l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = \\ = -6(\mathfrak{B}_{AB} + \mathfrak{B}_{BC}) + EI f_B \cdot \frac{6(l_{AB} + l_{BC})}{l_{AB} \cdot l_{BC}} \end{aligned} \quad (430)$$



Rys. 238.

Wpływ ustawienia podpór belki ciągłej nie na jednym poziomie, jak widać z równania (430), będzie tem większy, im

większy jest iloczyn  $EI$  t. j. im belka jest sztywniejsza. Wpływ opuszczania się i podnoszenia podpór na wykres momentów zginających przedstawiony jest na rys. 238.

O ile obniżenie podpory  $f_B$  nie jest wielkością stałą, lecz jest proporcjonalne do reakcji danej podpory, to mówimy, że podpora  $B$  jest sprężysta. Istnieje wówczas zależność:

$$R_B = k \cdot f_B \quad f_B = \frac{R_B}{k} \quad (431)$$

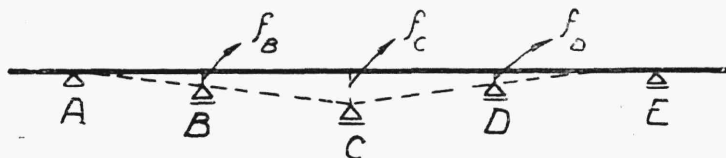
gdzie  $k$  oznacza pewien współczynnik proporcjonalności.

Wstawiamy wzór (431) we wzór (430) i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_A \cdot l_{AB} + 2 M_B (l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = \\ = - 6 (\mathfrak{L}_{AB} + \mathfrak{L}_{BC}) + EJ \frac{R_B}{k} \cdot \frac{6 (l_{AB} + l_{BC})}{l_{AB} \cdot l_{BC}} \end{aligned} \quad (432)$$

We wzór ten musimy wstawić w dalszym ciągu wartość reakcji  $R_B$  ze wzoru (424).

Przypuśćmy, że oprócz podpory  $C$  również i dwie sąsiednie podpory  $B$  i  $D$  doznały przesunięć  $f_B$  i  $f_D$  (rys 239); wówczas odpowiednie kąty obrotu,



Rys. 239.

wywołane obniżeniem się podpór, będą równe  $\frac{f_C - f_D}{l_{DC}}$  i  $\frac{f_C - f_B}{l_{BC}}$ . Wyzy-

skując te ułamki łącznie ze wzorami (431) i (424), możemy ustalić zależność między pięcioma kolejnymi momentami podporowymi, która zastąpi nam równanie trzech momentów dla belki na podporach sprężystych <sup>1)</sup>.

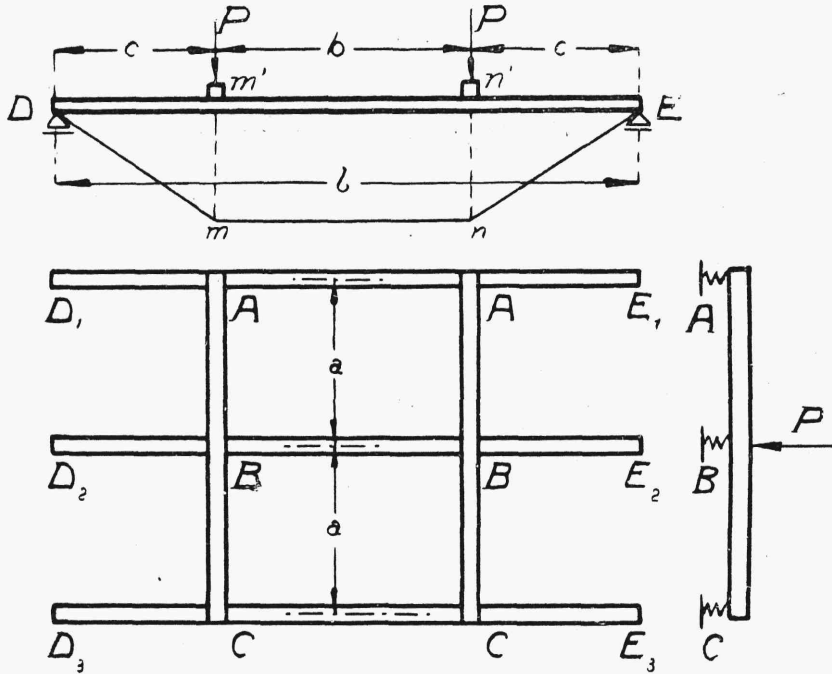
Gdy liczba podpór sprężystych belki jest niewielka, dogodnym bywa stosować sposób obliczenia belek ciągłych, polegający na porównaniu ze sobą pionowych przesunięć belki nad podporami (por. § 4, wzór 385).

Bierzemy dla przykładu dwie belki  $ABC$  (sztywność  $EJ$ ) podparte w ten sposób, iż końce ich i środki spoczywają na belkach poprzecznych

<sup>1)</sup> Por. H. Czopowski, „Belka wieloprzęsłowa na podporach sprężystych“, Przegl. Techn. 1896 str. 292.

$DE$  (sztywność  $E'I'$ ), podpartych sztywno w dwóch punktach (rys 240). Belki obciążone są siłami  $P$  zaczepionymi w punktach  $B$  przecięcia się belek podłużnych z poprzecznymi.

Belka podłużna ugina się w punkcie  $B$  na  $y_1$ , a w punktach  $A$  i  $C$



Rys. 240.

na  $y_2$ . Wobec symetrii belki  $AC$  względem punktu  $B$  możemy uważać punkt ten za punkt utwierdzenia belki  $AB$  obciążonej w końcu  $A$  siłą równą  $R_A$ . Wówczas ugięcie takiej belki będzie się równało:

$$y = y_1 - y_2 = \frac{R_A \cdot a^3}{3EI} \quad (433)$$

Ugięcie  $y_2$  równa się, z drugiej strony, ugięciu skrajnej poprzecznej belki  $DE$  w punktach podparcia belek  $AC$ . Aby wyznaczyć to ugięcie, sporządzamy dla danej belki  $DE$  wykres obciążenia wtórnego. Będzie on miał kształt trapezu  $DmnE$  (rys. 240), gdzie rzędne  $mm' = nn' = R_B \cdot c$  lub  $R_A \cdot c$ . Reakcja od obciążenia wtórnego belki  $D_2E_2$  lub  $D_1E_1$  równa się:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{R_B \cdot c(l-c)}{2} \quad \text{względnie} \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{R_A \cdot c(l-c)}{2}$$

zaś moment wtórny w punktach podparcia belek  $AC$  wyniesie:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{R_B \cdot c(l - c)}{2} \cdot c - \frac{R_B \cdot c^2}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{c^3(3l - 4c)R_B}{6} \quad (434)$$

Na podstawie tego wzoru i analogicznego dla  $\mathfrak{M}_A$  obliczamy  $y_1$  i  $y_2$ :

$$y_1 = \frac{c^3(3l - 4c)}{6E'J'} \cdot R_B \quad y_2 = \frac{c^3(3l - 4c)}{6E'J'} \cdot R_A \quad (435)$$

Wstawiamy te wielkości w równanie (433):

$$\frac{R_A \cdot a^3}{3EJ} = \frac{c^3(3l - 4c)}{6E'J'} (R_B - R_A) \quad (436)$$

skąd

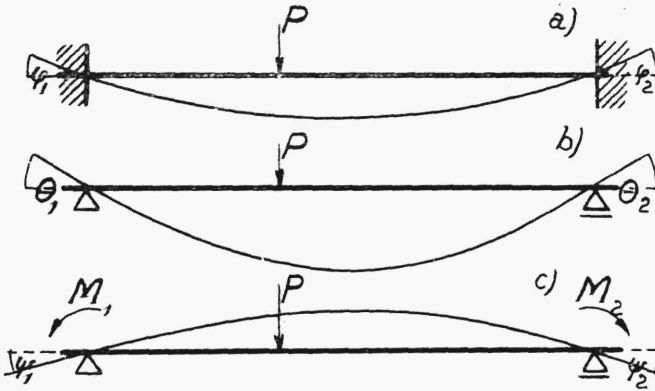
$$R_B - R_A = \frac{a^3 \cdot 6E'J'}{3EJc^3(3l - 4c)} \cdot R_A = 2\gamma R_A \quad (437)$$

Dołączając do równania (437) zależność:

$$P = 2R_A + R_B \quad (438)$$

otrzymujemy:

$$R_A = \frac{1}{3 + 2\gamma} \cdot P \quad R_B = \frac{1 + 2\gamma}{3 + 2\gamma} \cdot P \quad (439)$$



Rys. 241.

Bierzemy belkę utwierdzoną w ten sposób, iż końce jej pod działaniem sił zewnętrznych mogą ulec pewnemu obrotowi, proporcjonalnemu do odpowiedniego momentu podporowego (rys. 241). Mamy więc:

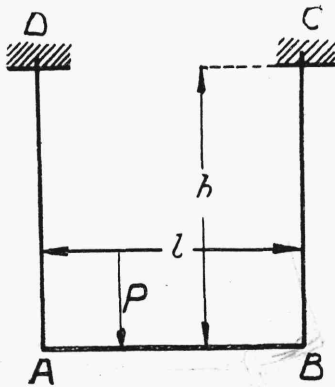
$$\varphi_1 = \frac{1}{k} \cdot M_1 \quad \text{i} \quad \varphi_2 = \frac{1}{k} \cdot M_2 \quad (440)$$

Odrzucamy utwierdzenie i, rozpatrując belkę jako swobodnie podpartą, obliczamy kąty obrotów jej końców pod działaniem sił zewnętrznych ( $\Theta$ ) i momentów podporowych ( $\psi$ ). Gdybyśmy mieli do czynienia z utwierdzeniem zupełnym, mielibyśmy wówczas  $\Theta_1 - \psi_1 = 0$  i  $\Theta_2 - \psi_2 = 0$ , w danym jednak razie suma obydwóch kątów równać się musi rzeczywistemu kątowi obrotu, czyli że dochodzimy tu do równań następujących:

$$\Theta_1 - \psi_1 = \frac{1}{k} \cdot M_1 \quad \Theta_2 - \psi_2 = \frac{1}{k} \cdot M_2 \quad (441)$$

z których możemy wyznaczyć momenty utwierdzenia.

Przykładem sprężystego utwierdzenia może być konstrukcja, przedstawiona na rys. 242. Mamy tu dwa wieszaki  $DA$  i  $CB$ , utwierdzone całkowicie w punktach  $D$  i  $C$ . W punktach  $A$  i  $B$  wieszaków utwierdzona jest belka  $AB$ . Sztywność wieszaków jest nieduża.



Rys. 242.

Siły działające na belkę  $AB$  wywołują ugięcie wieszaków, wskutek czego mamy tu do czynienia z utwierdzeniem sprężystym (parcie poziome pomijamy).

Wartość współczynnika  $\frac{1}{k}$ -tego utwierdzenia belki możemy więc obliczyć na podstawie wzorów dla ugięcia wieszaków.

Oznaczając przez  $M_1$  moment utwierdzenia w  $A$  i  $B$ , obliczamy kąt obrotu końcowych przekrojów wieszaków ze wzoru ( $E_1 J_1$  — sztywność wieszaków):

$$\varphi_1 = \frac{M_1 \cdot h}{E_1 J_1} \quad (442)$$

skąd dla współczynnika  $\frac{1}{k}$  otrzymujemy wzór następujący:

$$\frac{1}{k} = \frac{\varphi_1}{M_1} = \frac{h}{E_1 J_1} \quad (443)$$

W razie sprężystego utwierdzenia belki w murze, współczynnik  $\frac{1}{k}$  wyznaczamy na podstawie własności sprężystych muru.

Wpływ obrotu  $\varphi$  na wykres momentów przedstawiony jest na rys. 243.



Rys. 243.