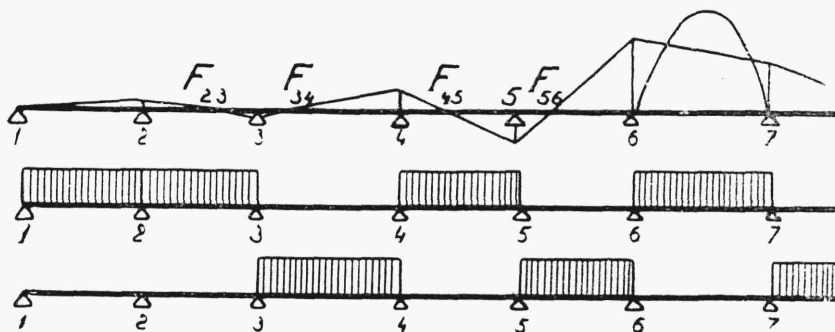


i z niego ustalamy, jak wpływają obciążenia kolejnych przęseł belki ciągłej na moment podporowy w punkcie 2.

Jeżeli obciążymy przęśło 12, to przęśło to odegra rolę przęśła 67 z rys. 226, a podpora 2 rolę podpory 7. Będzie z tego wynikało, że obciążenie przęśła 12 zwiększy moment ujemny nad podporą 2.

Jeżeli obciążymy przęśło 23, wówczas ono odegra tu rolę przęśła 67, a podpora 2 rolę podpory 6. Będzie z tego wynikało, że obciążenie przęśła 23 również zwiększy moment ujemny nad podporą 2.

Jeżeli obciążymy przęśło 34, wtedy to przęśło odegra rolę przęśła 67, a podpora 2 rolę podpory 5. Będzie z tego wynikało, że obciążenie przęśła 34 zmniejszy moment ujemny na podporze 2.



Rys. 226, 227 i 228.

Widać stąd, iż dla otrzymania $\max M$ nad podporą 2 trzeba przede wszystkim obciążyć oba przęśła przylegające do tej podpory, następnie zaś co drugie przęśło belki ciągłej. Dla otrzymania nad podporą 2 najmniejszego momentu podporowego, należałoby obciążyć belkę w sposób przedstawiony na rys. 228.

Z rysunku 226 widocznem jest, jak szybko zmniejsza się wzdłuż belki ciągłej wpływ obciążenia danego przęśła.

6. Linje wpływowe dla belek statycznie niewyznaczalnych ¹⁾.

Podstawą do obliczenia linii wpływowych belek statycznie niewyznaczalnych są linie wpływowe momentów podporowych, gdyż od tych linii przechodzimy do linii wpływowych dla momentów zginających, reakcyj

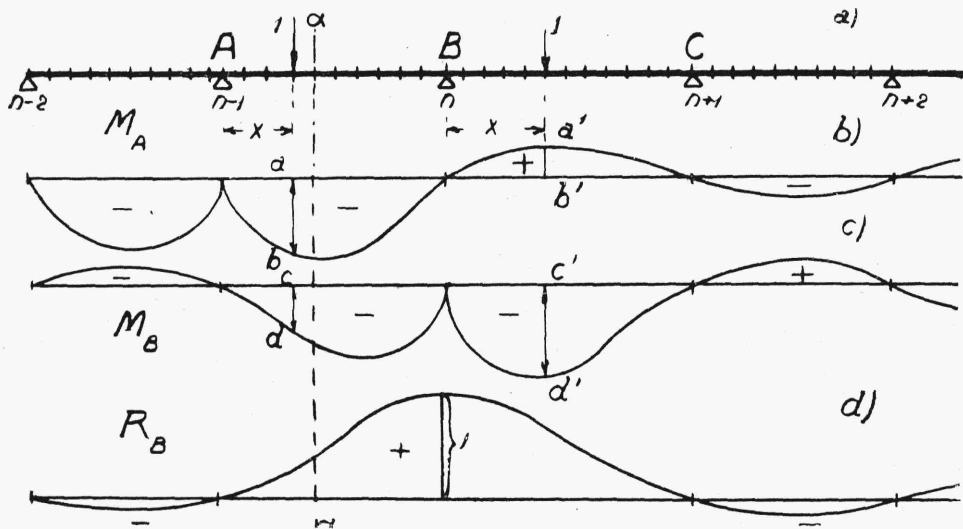
¹⁾ Rzędne linii wpływowych dla belek ciągłych znaleźć można np. w tablicach G. Griot'a (Zürich) i w pracy A. Cart'a i L. Portes'a p. t. „Calcul des ponts métalliques”.

i sił poprzecznych, potrzebnych do obliczenia belek, już tylko drogą algebraicznego dodawania rzędnych.

Jeżeli końce belki ciągłej są swobodnie podparte, wówczas do obliczenia jej wystarcza równanie trzech momentów:

$$M_A \cdot l_{AB} + 2M_B(l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = -6(\mathfrak{V}_{AB} + \mathfrak{V}_{BC}) \quad (416)$$

W równaniu (416) wielkości \mathfrak{V} zależą w sposób wyraźny od obciążenia belki, dlatego wielkości te przedstawiamy, jako funkcje odległości ciężaru l od jakiegoś stałego punktu na belce, za jaki uważamy lewą podporę każdego przęsła belki.



Rys. 229.

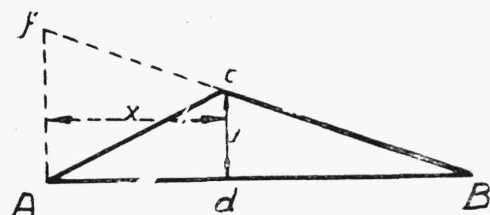
Belkę dzielimy na pewną liczbę części (np. 10 dla każdego przęsła), starając się, aby podziałki nie różniły się zbyt wiele od siebie.

Dalej ustawiamy ciężar l kolejno na każdej z podziałek.

Jeżeli ciężar znajduje się w odległości x (rys. 229a) od podpory A , wówczas ustawiamy dla niego i dla danej belki równania trzech momentów (416), wyznaczając z nich odpowiednie wartości M_A , M_B , M_C i t. d. Niech będzie odcinek ab równy momentowi M_A w chwili znajdowania się ciężaru l nad danym przekrojem; wspomniany odcinek odkładamy na linii wpływowej dla M_A (rys. 229b) od osi odciętych, na pionie x , odpowiadającym ciężarowi. Odcinek cd równy w tych samych warunkach momentowi M_B odkładamy na linii wpływowej dla M_B , również na pionie x (rys. 229c) i t. d.

Przenosimy ciężar 1 np. na podziałkę, znajdującą się w odległości x od podpory B . Znowu obliczamy momenty M_A , M_B , M_C i t. d. i otrzymujemy dla nich, przypuśćmy, wartości $M_A = a'b'$, $M_B = c'd'$ i t. d. Odcinek $a'b'$ odkładamy na linii M_A na nowym pionie x , odcinek $c'd'$ na linii M_B na tym samym pionie i t. d. Postępując w dalszym ciągu w podobny sposób, po wykonaniu tylu przesunięć ciężaru 1, ile było na belce podziałek, znajdujemy wszystkie rzędne, odpowiadające tym podziałkom, i dla wszystkich linii wpływowych M_A , M_B , M_C i t. d., dochodząc w ten sposób do wyznaczenia poszukiwanych linii.

W układzie równań (416), ustawionych dla danego położenia na belce ciężaru 1, wielkości \mathfrak{S} mają wartości różne od zera jedynie dla dwóch końców przęsła, na którym stoi ciężar 1.



Rys. 230.

W tym ostatnim wypadku obliczenie \mathfrak{S} , t. j. reakcyj obciążenia wtórnego belki swobodnie podpartej AB , najdogodniej jest wykonać w następujący sposób (wykres momentów na rys. 230).

Jeżeli ciężar 1 stoi na przęśle AB belki ciągłej w odległości x od podpory A , wówczas

rzędna wykresu pod ciężarem 1 równa się:

$$\overline{cd} = \frac{1(l-x)}{l} \cdot x \quad (417)$$

a rzędna Af równa się x .

Znajdujemy wielkość \mathfrak{S}_{AB} , jako reakcję podpory B przy obciążeniu wtórnem, składającym się z pola wykresu $ABc = ABf - Acf$:

$$\mathfrak{S}_{AB} = \frac{1}{l} \cdot \left[\frac{1 \cdot x \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot l - \frac{1 \cdot x \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x \right] = \frac{x(l^2 - x^2)}{6l} \quad (418)$$

W związku ze wzorem (418) równanie (416) możemy przekształcić w następujące (dla przęsła obciążonego):

$$M_A \cdot l_{AB} + 2M_B(l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = - \frac{x(l^2 - x^2)}{l} \quad (419)$$

Stosując równanie (419) np. do belki sześcioprzęsłowej, dochodzimy do układu równań następujących, odpowiadających położeniu ciężaru 1 w przęśle 34 (vid. np. rvs. 226):

$$\begin{aligned}
 2 M_2 (l_{12} + l_{23}) + M_3 \cdot l_{23} &= 0 \\
 M_2 \cdot l_{23} + 2 M_3 (l_{23} + l_{34}) + M_4 \cdot l_{34} &= \\
 &= - \frac{(l_{34} - x) (l_{34}^2 - (l_{34} - x)^2)}{l_{34}} \\
 M_3 \cdot l_{34} + 2 M_4 (l_{34} + l_{45}) + M_5 \cdot l_{45} &= \quad (420) \\
 &= - \frac{x (l_{34}^2 - x^2)}{l_{34}} \\
 M_4 \cdot l_{45} + 2 M_5 (l_{45} + l_{56}) + M_6 \cdot l_{56} &= 0 \\
 M_5 \cdot l_{56} + 2 M_6 (l_{56} + l_{67}) &= 0
 \end{aligned}$$

Przechodząc od jednego położenia ciężaru 1 do następnych i ustawiając dla każdego z nich układy równań podobne do (420), znajdujemy szereg rzędnych linii wpływowych poszczególnych momentów podporowych i odkładamy je, jak wyżej, na odpowiednich pionach (rys. 229 b i c).

Z równań (419) wynika, że momenty podporowe będą naogół funkcją x następującego typu:

$$M = N \cdot x + R \cdot x^2 + S \cdot x^3 \quad (421)$$

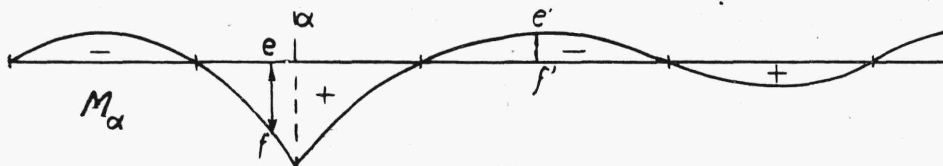
czyli, że będą miały kształt krzywych trzeciego stopnia.

Wykreśliwszy linie wpływowe dla momentów podporowych M_A, M_B, M_C i t. d. (rys. 229), przechodzimy od nich do linii wpływowych momentów zginających dla dowolnego przekroju belki $\alpha\alpha$ w przęśle AB przy pomocy równania:

$$M_{\alpha}^{AB} = M_{o\alpha}^{AB} + M_A \cdot \frac{l_{AB} - \alpha}{l_{AB}} + M_B \cdot \frac{\alpha}{l_{AB}} \quad (422)$$

gdzie α oznacza odcięta przekroju belki w przęśle AB .

Dopóki chodzi nam o wyznaczenie linii wpływowych momentu M_{α} na przestrzeni wszystkich przęseł belki, z wyjątkiem tylko przęśla AB , dotąd nie potrzebujemy się liczyć z wyrazem $M_{o\alpha}^{AB}$, który oznacza moment

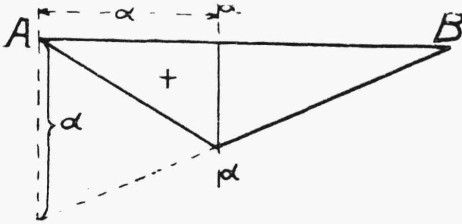


Rys. 231.

zginający w przęśle AB w przekroju α , o ile to przęśło rozpatrujemy, jako belkę swobodnie podpartą w punktach A i B .

W tym wypadku wyznaczenie rzędnych linii wpływowej momentu zginającego w α odbywa się w następujący sposób.

Przeprowadzamy pion (rys 231) przez podziałkę, dla której rzędną wyznaczamy, i bierzemy odpowiadające temu pionowi rzędne linii wpływowych dla M_A i M_B . Rzędne te dodajemy do siebie, zmniejszwszy je uprzednio w stosunku $\frac{l-x}{l}$ i $\frac{x}{l}$, a sumę ich, jako rzędną linii wpływowej poszukiwanego momentu $e'f'$, odkładamy na tym samym pionie, na wykresie M_α .



Rys. 232.

Wyznaczając rzędne ef linii wpływowej na odcinku, odpowiadającym przęsłu AB , musimy do rzędnych, obliczonych w sposób tylko co opisany, dodać jeszcze rzędne momentu $M_{\alpha\alpha}^{AB}$, t. j. rzędne trójkąta $AB\alpha$, przedstawionego na rys. 232.

Dochodzimy w rezultacie do linii wpływowej, przedstawionej dla M_α na rys. 231.

Rzędne linii wpływowej dla siły poprzecznej w danym przekroju $\alpha\alpha$ belki ciągłej wyznaczamy ze wzoru (por. § 4 niniejszego rozdziału):

$$T_\alpha^{AB} = T_{\alpha\alpha}^{AB} + \frac{M_B - M_A}{l_{AB}} \quad (423)$$

W tym wzorze $T_{\alpha\alpha}^{AB} = 0$ dla wszystkich przęseł belki, z wyjątkiem przęsła AB . Dla wszystkich tych przęseł obliczenie rzędnych linii wpływowej T_α dla siły poprzecznej w przekroju α przedziału AB odbywa się w następujący sposób:

Bierzemy dla wszystkich podziałek belki ciągłej wartości rzędnych linii wpływowych dla M_A i M_B i rzędne, odpowiadające tej samej podziałce,

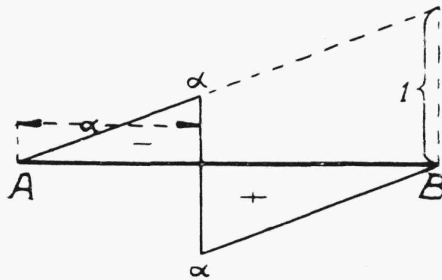
układamy w ułamki $\frac{M_B - M_A}{l_{AB}}$,

które w pewnej skali odkładamy na pionach odpowiednich podziałek belki.

W ten sposób otrzymujemy rzędne linii wpływowej T_α^{AB} dla wszystkich podziałek, z wyjątkiem podziałek przęsła AB .

W tym ostatnim przęśle do

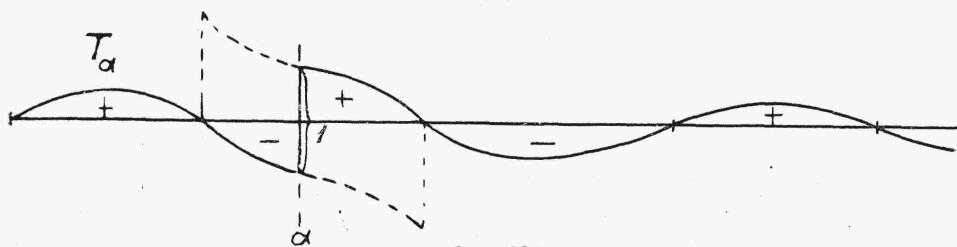
każdej rzędnej $\frac{M_B - M_A}{l_{AB}}$ do-



Rys. 233.

dajemy rzędną linii wpływowej siły poprzecznej w przekroju $\alpha\alpha$, obliczone

dla przęsła AB , jak dla belki swobodnie podpartej, t. j. według rys. 233. Linia wpływowa dla T_{α}^{AB} przedstawiona jest na rys. 234.



Rys. 234.

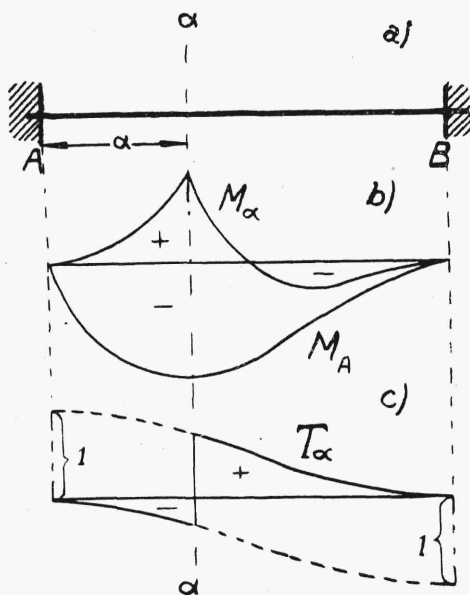
W sposób analogiczny do poprzedniego znajdujemy na podstawie wzoru:

$$R_B = T_{oB}^{BC} - T_{oB}^{AB} + \frac{M_C - M_B}{l_{BC}} - \frac{M_B - M_A}{l_{AB}} \quad (424)$$

linię wpływową reakcji podpory B (rys. 229 d).

Linie wpływowe dla momentów podporowych dla belki utwierdzonej w końcach znajdujemy ze wzorów (por. § 2):

$$M_A = - \frac{1 \cdot x^2(l-x)}{l^2} \quad M_B = - \frac{1 \cdot x(l-x)^2}{l^2} \quad (425)$$



Rys. 235.

Postępując tu z równaniami (425) w ten sam sposób, jak postępowaliśmy z odpowiednimi równaniami (419) belki ciągłej, dochodzimy do linii wpływowych dla momentu zginającego, reakcji podpory i siły poprzecznej (rys. 235 b i c).

Linia dla M_A jest przedstawiona na rys. 235 b.

Moment zginający belki w przekroju $\alpha\alpha$ będzie się równał:

$$M_{\alpha} = R_A \cdot x - M_A \quad (426)$$

$$M_{\alpha} = R_A \cdot x - M_A - 1 \cdot (x-x)$$

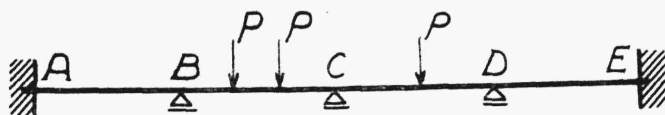
zaś reakcję R_A możemy wyznaczyć z równania:

$$R_A \cdot l - M_A + M_B - 1 \cdot (l-x) = 0 \quad (427)$$

Ponieważ linie wpływowe zarówno belki ciągłej, jak i belki w dwóch końcach utwierdzonej mają kształt krzywoliniowy, niepodobna podać prostej wskazówki otrzymywania na podstawie tych linii największych wartości wszystkich tych wielkości, dla których zostały wyprowadzone. Najniekorzystniejsze obciążenie linii wpływowych musi tu się odbywać na podstawie prób kolejnych. Należy jednak mieć zawsze na uwadze, że obciążenie danej linii powinno dotyczyć tylko pół jednego i tego samego znaku, a największe ciężary powinny się skupiać około największych rzędnych.

7. Szczególne warunki podparcia i utwierdzenia belek statycznie niewyznaczalnych.

Wszystkie omówione wyżej sposoby obliczenia belek ciągłych dotyczyły belek wspartych na podporach przegubowo-przesuwnych jednakowej wysokości, przyczem w razie sił zewnętrznych nieprostokątnych do osi belki, jedna z podpór powinna być nieprzesuwna. Obliczenie ulega



Rys 236.

pewnej zmianie, o ile końcowe podpory belki nie są przegubowe, lecz płaskie, czyli o ile końce belki są utwierdzone (rys. 236). W tym wypadku do wyznaczenia momentów podporowych belki nie wystarcza już równania trzech momentów, gdyż równanie to pozwala na wyznaczenie tylko $n-2$ niewiadomych (przy liczbie podpór n), podczas gdy liczba niewiadomych momentów stanie się tu równą liczbie podpór. Brakującą liczbę równań otrzymujemy z warunku utwierdzenia końców belki, czyli z warunku, że kąty obrotu końców belki, będące funkcjami momentów podporowych, muszą być równe zeru. Otrzymamy tą drogą dwa równania:

$$\varphi_A = 0 \quad \varphi_E = 0 \quad (428)$$

które uzupełniają liczbę równań, wynikających z twierdzenia o trzech momentach.

Przypuśćmy teraz, że w belce ciągłej o podporach przegubowo-przesuwnych (obciążenie prostopadłe do osi) jedna z podpór jest niższa od