

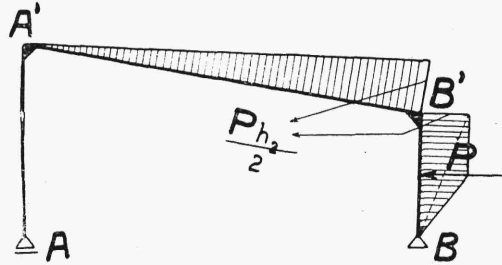
Momenty zginające wyznaczamy w dalszym ciągu w sposób analogiczny do omówionego pod a). Odpowiedni wykres momentów przedstawiony jest na rys. 253.

f) Reakcja  $R_A$  będzie tu się równała (siła  $P$  zaczepiona jest w środku wysokości słupa  $BB'$ , rys. 254):

$$R_A = \frac{P \cdot h_2}{2l}$$

Na odcinku ramy  $A'B'$  moment zginający wyraża się wzorem:

$$M_\alpha = \frac{P \cdot h_2}{2l} \cdot \alpha$$



Rys. 254.

a na odcinku  $B'B$  w górę od siły  $P$  wzorem:

$$M_\alpha = \frac{P \cdot h_2}{2l} \cdot l \cdot \frac{h_2 - \alpha}{h_2} + \frac{P}{2} \alpha = \frac{P \cdot h_2}{2}$$

i w dół od siły  $P$  wzorem:

$$M_\alpha = \frac{P \cdot h_2}{2l} \cdot l \cdot \frac{h_2 - \alpha}{h_2} + \frac{P}{2} \alpha - P \left( \alpha - \frac{h_2}{2} \right) = P(h_2 - \alpha)$$

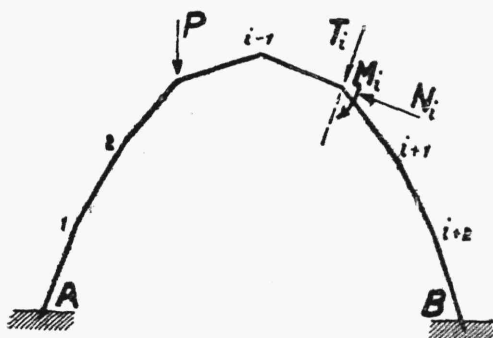
Na podstawie powyższych rozważań stwierdzamy, że o ile siły i momenty zewnętrzne zostały zaczepione do ramownicy w punktach węzłowych, wówczas wykresy momentów zginających mają dla poszczególnych odcinków ramy kształt prostoliniowy. W razie, gdy, oprócz sił tylko co wymienionych, do danego przedziału ramy między węzłami zostały również zaczepione pewne siły zewnętrzne, wówczas sporządzamy dla obciążonego przedziału wykres momentów zginających, jak dla belki w dwóch punktach podpartej, poczem wykres ten dodajemy do poprzednich wykresów prostoliniowych. Reakcje podpór rozpatrujemy tu oczywiście, jako siły węzłowe.

### 3. Ogólne metody obliczania ram statycznie niewyznaczalnych.

Obliczenie ramy statycznie niewyznaczalnej w wypadku najogólniejszym opiera się na wyborze dla danej ramy pewnego statycznie wyznaczalnego układu zastępczego, powstałego przez odrzucenie w ramie nadlicz-

bowych podpór i zamocowań i przez wprowadzenie wielkości statycznie niewyznaczalnych, jako niewiadomych sił zewnętrznych, których wyznaczenie odbywa się drogą przyrównania do zera przesunięć układu w punktach odrzuconych podpór i zamocowań. Jednocześnie z wyborem statycznie wyznaczalnego schematu zastępczego może tu być ustalona i liczba wielkości statycznie niewyznaczalnych zadania, czyli stopień statycznej niewyznaczalności ramownicy.

Wprowadzając do układu zastępczego niewiadome siły zewnętrzne, musimy je dobierać w ten sposób,



Rys. 255.

aby odkształcenia danego układu statycznie niewyznaczalnego pod działaniem danych sił zewnętrznych, z jednej strony, i odkształcenia zastępczego układu statycznie wyznaczalnego pod działaniem zarówno danych sił zewnętrznych, jak i niewiadomych sił i momentów statycznie niewyznaczalnych, z drugiej strony, mogły być identyczne.

Potrzebne do wyłożonego sposobu obliczenia odkształcenia w pewnych punktach układu ramowego obliczamy bądź zapomocą równań, dotyczących energii układów sprężystych (rozdz. XVI), bądź też drogą geometrycznego dodawania do siebie odkształceń poszczególnych części ramy.

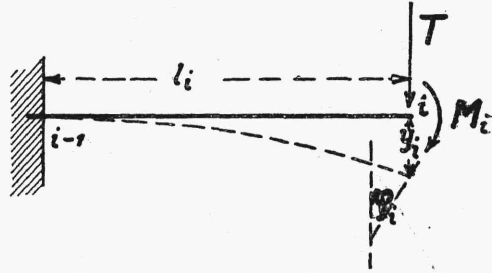
Ogólny zarys postępowania w tym ostatnim wypadku opiszemy na przykładzie, przedstawionym na rys. 255.

Odrzucamy podporę  $B$  i zastępujemy jej działanie przez niewiadomy moment podporowy  $M_B$ , siłę poziomą  $H_B$  i pionową  $R_B$ . Z wielkościami temi związane są zapomocą równań równowagi  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$  i  $\Sigma M = 0$  wielkości  $M_A$ ,  $R_A$  i  $H_A$ , które bywa nieraz wygodniej uważać za poszukiwane wielkości nadliczbowe zadania, niż tamte. Każdy z odcinków ramy  $i - 1$ ,  $i$  rozpatrujemy, jako belkę w końcu  $i - 1$  utwierdzoną, a w końcu  $i$  swobodną i obciążoną siłą poprzeczną  $T_i$ , siłą podłużną  $N_i$  i momentem  $M_i$ .

Przeprowadzamy przez węzeł  $i$  ramy przekrój normalny do odcinka  $i - 1$ ,  $i$  oraz rzutujemy na kierunki  $T_i$  i  $N_i$  siły działające na lewo (względnie na prawo) od danego przekroju. Stąd (z równań  $\Sigma X = 0$ ,  $\Sigma Y = 0$ ) otrzymujemy wzory, wyrażające siły  $T_i$  i  $N_i$  przez siły zewnętrzne i przez wielkości statycznie niewyznaczalne (np. przez  $H$  i  $R_B$ ). Jednocześnie znajdujemy sumę momentów sił działających na prawo (względnie na lewo) od

danego przekroju i przedstawiamy tą drogą moment  $M_i$  jako funkcję wielkości statycznie niewyznaczalnych (np.  $H$ ,  $R_B$  i  $M_B$ ).

Odształcenia poszczególnych prętów  $i - 1, i$  obliczamy, jako dla belek w punktach  $i - 1$  utwierdzonych, a w końcach  $i$  obciążonych siłami  $T_i$  i momentami  $M_i$  (rys. 256), ewentualnie i pewnymi siłami zewnętrznymi. Wpływ sił  $N_i$  na wielkości statycznie niewyznaczalne najczęściej w obliczeniu ram pomijamy. Pod działaniem siły  $T_i$  i momentu  $M_i$  przekrój  $i$  belki przesuwają się względem przekroju  $i - 1$  o  $y_i$  i obraca się o kąt  $\varphi_i$ . Wielkości te obliczamy ze wzorów na odształcenia belek utwierdzonych w jednym końcu, a w drugim swobodnych.



Rys. 256.

Przez  $y_i'$  oznaczamy pionowe, a przez  $\bar{y}_i$  poziome rzuty przesunięć  $y_i$ . Jeżeli przekrój  $i - 1$  ramy uległ obrotowi o kąt  $\omega_{i-1}$  to punkt  $i$ , poza przesunięciem  $y_i$ , dozna jeszcze w tym samym kierunku przesunięcia  $\omega_{i-1} \cdot l_i$ , którego rzut pionowy oznaczamy przez  $(\omega_{i-1} \cdot l_i)'$  a poziomy przez  $(\omega_{i-1} \cdot l_i)''$ .

Przekrój 1 obraca się względem przekroju utwierdzenia  $A$  o kąt  $\varphi_1$ , przekrój 2 względem przekroju 1 o kąt  $\varphi_2$ , zaś przekrój 2 względem przekroju  $A$  o kąt  $\omega_2$  (vid. rys. 255) równy:

$$\omega_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

Uogólniając powyższe określenie kąta  $\omega$ , ustawiamy wzór następujący:

$$\omega_i = \sum_1^i \varphi_j \quad (450)$$

Wyznaczamy teraz powstałe, wskutek odształcenia ramy, przesunięcia poziome ( $u_i$ ) i pionowe ( $v_i$ ) pewnego węzła  $i$  ramy. Otrzymujemy je ze wzorów następujących:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_1^i (\omega_{j-1} \cdot l_j)'' + \sum_1^i \bar{y}_j \\ v_i &= \sum_1^i (\omega_{j-1} \cdot l_j)' + \sum_1^i y_j' \end{aligned} \quad (451)$$

gdzie  $j$  oznacza poszczególne numera węzłów, zawartych między podporą  $A$  a węzłem  $i$ .

Jeżeli ogólna liczba prętów w ramie wynosi  $n$ , to mamy, że

$$u_B = u_n \quad v_B = v_n \quad \omega_B = \omega_n$$

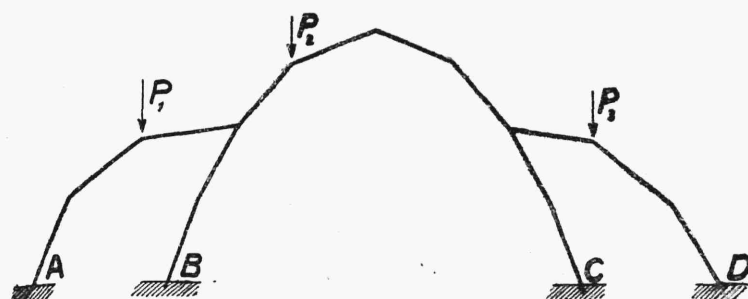
Ponieważ w rzeczywistości w punkcie  $B$  mamy podporę płaską, więc możemy ustawić trzy równania następujące:

$$u_B = 0 \quad v_B = 0 \quad \omega_B = 0 \quad (452)$$

Wobec tego, że przesunięcia  $u, v, \omega$  wyrażone są przez  $\varphi_i$  i  $y_i$ , a  $\varphi_i$  i  $y_i$  przez  $T_i$  i  $M_i$  i wobec tego, że ostatnie są funkcjami wielkości statycznie niewyznaczalnych, więc z równań (452) możemy wyznaczyć  $M_B, R_B$  i  $H$  (względnie  $M_A, R_A, H$ ).

Wyznaczenie przesunięć  $u, v, \omega$  jako funkcji wielkości  $H, R_B$  i  $M_B$  ulega znacznemu uproszczeniu, o ile liczba prętów ramownicy jest niewielka, np. w ramach prostokątnych jednoprzęsłowych.

O ile mamy do czynienia z ramami wieloprzęsłowymi, np. w rodzaju



Rys. 257.

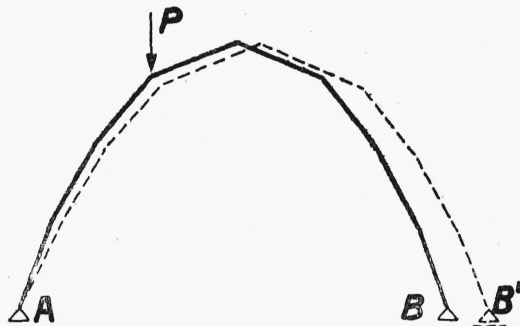
przedstawionej na rys. 257, to odrzucamy płaskie podpory w punktach  $B, C$  i  $D$  i, zachowując jedno tylko utwierdzenie w punkcie  $A$ , ustawiamy równania:

$$u = 0 \quad v = 0 \quad \omega = 0$$

dla wszystkich punktów  $B, C$  i  $D$  i wyznaczamy statycznie niewyznaczalne składowe reakcji tych podpór. W ten sam sposób rozumujemy, gdy nam chodzi jedynie o ustalenie liczby wielkości statycznie niewyznaczalnych danego zagadnienia.

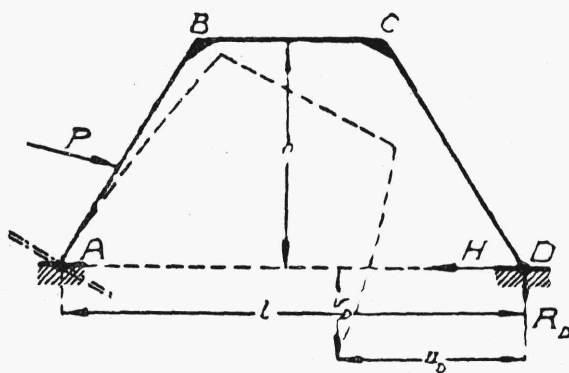
Jeżeliby rama przedstawiona na rys. 255 była ramą przegubową, wówczas mielibyśmy, że tożsamościowo  $v_B = 0$ , gdyż nawet w razie prze-

cięcia przegubu w  $B$ , linja przegubów musi tu pozostawać na prostej  $AB$ . Przesunięcie  $u_B$  równe odcinkowi  $BB'$  jest więc, wywołanem przez odkształcenie, zbliżeniem się lub rozsunieniem punktów  $A$  i  $B$ . Aby więc to przesunięcie obliczyć, możemy punkt  $A$  uważać za nieruchomy (przegubowy), zaś punkt  $B$  za swobodny. W danym wypadku momenty podporowe są równe zeru, zaś pionowe składowe reakcyj mogą być tu wyznaczone z równań statyki. Ten sposób postępowania dotyczy oczywiście tylko jednoprzęsłowych ram przegubowych i przedstawiony jest na rys. 258.



Rys. 258.

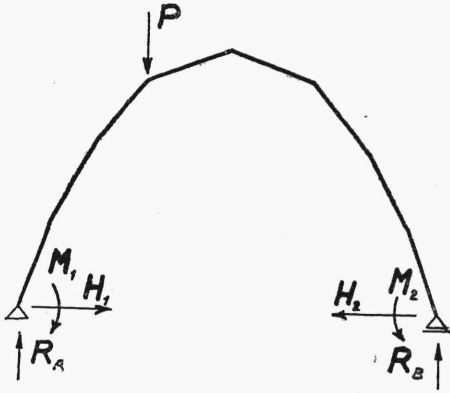
W razie ramy dwusłupowej, gdy podpory są przegubowe, możemy postępować w poniższy sposób (rys. 259). Zastępujemy podporę przegubową w  $D$  przez podporę przegubowo-przesuwną. Chodzi obecnie o znalezienie poziomego przesunięcia tej podpory, czyli o znalezienie przyrostu odległości punktów  $A$  i  $D$ . Aby tę wielkość otrzymać, zakładamy dalej, iż



Rys. 259.

w punkcie  $A$  rama jest utwierdzona, zaś w  $D$  reakcja została zastąpiona przez siłę  $R_D$ . Dla takiej ramy znajdujemy przyrost odległości punktów  $A$  i  $D$  i przyrównujemy go do zera, ustawiając równanie:  $u_D = f(H) = 0$ , skąd otrzymujemy nieznaną nam wielkość parcia poziomego  $H$ . Przesunięcie otrzymane wspomnianą drogą ma się do rzeczywistego poziomego prze-

sunięcia punktu  $D$  w stosunku  $1 : \cos \arctg \frac{v_D}{l}$ , który równa się jednak praktycznie 1.



Rys 260.

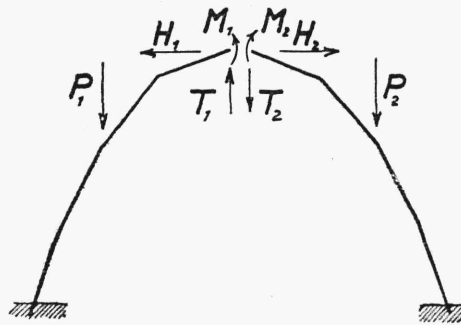
Dla danego układu ramowego można przyjąć cały szereg statycznie wyznaczalnych układów zastępczych, należy jednak wybrać z nich ten, który wymaga najprostszych obliczeń.

Dla ramy przedstawionej na rys. 255 możemy przyjąć też schemat przedstawiony na rys. 260 lub na rys. 261.

Przy wyborze układów zastępczych nieraz doprowadza do dobrych rezultatów wyzyskanie warunków symetrii obciążenia lub symetrii samego układu ramy.

W powyższych rozumowaniach wszędzie pomijaliśmy wpływ sił pośluznych na odkształcenie ramownic. Uwzględnienie, przy sumowaniu odkształceń, wydłużeń i skrótnów poszczególnych prętów zapomoćą wzorów analogicznych do wzorów (451) nie natrafia na żadne trudności zasadnicze, jednak komplikuje obliczenia bez wydatnego wpływu na ich ścisłość (por. § 9 niniejszego rozdziału).

W razie, gdy siły działają prostopadle do płaszczyzny ramy, poszczególne jej pręty ulegają, poza zginaniem, również skręcaniu. Mamy wtedy do czynienia z t. zw. dźwigarami załamanymi w planie <sup>1)</sup>.



Rys. 261.

Jeżeli pominiemy skróty i wydłużenia poszczególnych prętów ramy pod działaniem sił ściskających lub wyciągających, wówczas węzły układów ramowych pewnych kategorii będziemy mogli uważać za nieprzesu-

<sup>1)</sup> Vid. pracę autora „Teoria dźwigarów załamanych w planie”, 1926 str. 6.

walne. Należą tu np. układy w rodzaju przedstawionego na rys. 285, nie należą natomiast układy w rodzaju przedstawionego na rys. 274, w których przesunięcia węzłów są rezultatem wyginania się poszczególnych prętów, a nie tylko ich skrótu lub wydłużenia.

Poszczególne pręty o węzłach nieprzesuwalnych mogą być rozpatrywane jako belki na podporach niesprężystych, o końcach zaś utwierdzonych w sposób sprężysty (por. rozdz. XI). W tych wypadkach możemy za statycznie wyznaczalne układy zastępcze przyjmować szeregi belek swobodnie w dwóch punktach podpartych (w węzłach ramownicy) i obciążonych nieznanymi momentami na końcach.

W przypadku ramownicy przedstawionej na rys. 285 za statycznie wyznaczalny układ zastępczy przyjmujemy szereg belek następujących (por. str. 274):

belkę  $AA'$  z momentem  $M''_{A'}$  nad podporą  $A'$

„  $BB'$  „ „  $M''_{B'}$  „ „  $B'$

„  $A'B'$  z momentami  $M'_{A'}$  i  $M_{B'}$  nad podporami  $A'$  i  $B'$

„  $B'C'$  „ „  $M'_{B'}$  i  $M_{C'}$  nad podporami  $B'$  i  $C'$

i t.d.

Pod działaniem przytoczonych momentów i obciążenia zewnętrznego końcowe przekroje wymienionych belek doznałyby obrotów następujących:

belka  $AA'$  nad podporą  $A'$ , obrót  $\varphi''_{A'}$

„  $A'B'$  „ „ „  $A'$  „ „  $\varphi'_{A'}$

i t.d.

Wobec tego, że z określenia ramownicy wynika, iż kąty  $AA'B'$ ,  $BB'C'$  i t.d. nie ulegają zmianie w czasie odkształcenia się ramy, otrzymujemy, że

$$\varphi''_{A'} = \varphi'_{A'}, \quad \varphi''_{B'} = \varphi'_{B'}, \quad \text{i t.d.}$$

Ten szereg równań da nam 6 zależności między 10 niewiadomymi momentami węzłowymi. Brakujące cztery równania da nam równanie  $\Sigma M = 0$ , ustawione dla poszczególnych węzłów ramownicy.

Przybiera ono np. dla  $B'$  postać:

$$M_{B'}' + M_{B'}'' = M_{B'}$$

a dla węzła  $C'$  postać następującą:

$$M_{C'}' + M_{C'}'' = M_{C'}$$

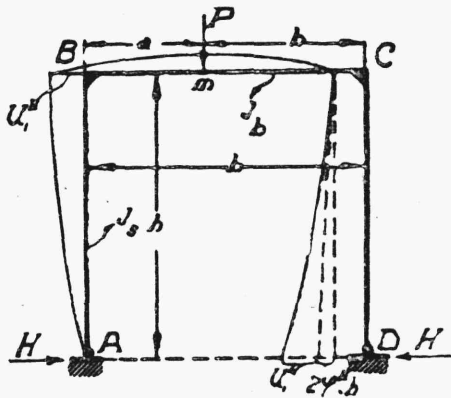
Przykład tego rodzaju obliczenia podany jest w paragrafie 7 o ramach wielopiętrowych <sup>1)</sup>.

Pozatem obliczenie to znajduje szerokie zastosowanie w przypadku kratownic o węzłach sztywnych (vid. rozdz. XV).

W dalszej konsekwencji przytoczony sposób rozumowania doprowadza do równania czterech momentów, omówionego w paragrafie 10.

#### 4. Ramy prostokątne statycznie niewyznaczalne.

Przypuśćmy, że mamy ramę prostokątną przegubową  $ABCD$  (rys. 262), obciążoną siłą skupioną, ustawioną według rysunku. Zastępujemy przegubową podporę  $D$  ramy przez podporę przegubowo-przesuną i zaczepiamy do tej ostatniej siłę  $H$ , równą poziomej składowej reakcji odrzuconej podpory przegubowej.



Rys. 262.

W ten sposób dochodzimy do ramy statycznie wyznaczalnej, dla której reakcje podpór łatwo możemy obliczyć na podstawie równań równowagi. Obliczamy dla tej ramy poziome przesunięcia punktu  $D$  ramy, raz pod działaniem zewnętrznej siły  $P$ , drugi raz pod działaniem siły  $H$ . W pierwszym wypadku mamy do czynienia z odkształceniem, przedstawionem na rys. 263, gdzie przewidziane jest nie tylko swobodne przesuwanie się podpory  $D$ , lecz również i podpory  $A$ . Fakt,

że podpora  $A$  pozostała nieprzesuną nie ma tu żadnego znaczenia, gdyż zamiast poziomego przesunięcia  $AA'$  punktu  $A$  od pierwotnego położenia  $A'$ ,

<sup>1)</sup> Por. np. A. Ostenfeld „Die Deformationsmethode“, Berlin 1926.