

W szczególności kąt ω_0 w łuku trójpřegubowym równa się nachyleniu prostej, łączącej przegub A z przegubem C (rys. 288). Oznaczając przez a i b współrzędne przegubu C (osie współrzędnych według rys. 297) a przez c długość cięciwy AC , otrzymujemy:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

stąd zależność między przyrostami a , b i c , wywołanymi odkształceniem się łuku, odpowiada równaniu:

$$2a \Delta a + 2b \Delta b = 2c \Delta c \quad (539)$$

W razie symetrycznego obciążenia łuku $\Delta a = 0$, wobec czego Δb otrzymamy bezpośrednio z równania (539). Przyrost Δc otrzymać możemy ze wzoru (535), uważając za oś OX prostą AC . Dla kąta ω_0 otrzymamy wzór następujący:

$$\omega_0 = \frac{\Delta b}{c \cos \beta}$$

gdzie $\beta = \angle CAB$.

Odkształcenie łuku bezprzegubowego lub innego łuku statycznie niewyznaczalnego w pewnym punkcie K może być obliczone dopiero po wyznaczeniu wielkości H , R_A i M_A , poczem odbywa się, jak wyżej, ze wzorów (530), (535) i (536).

5. Wyznaczenie wielkości H , R_A i M_A w łukach bezprzegubowych.

Obliczenie łuków statycznie niewyznaczalnych odbywa się według tych samych metod, co wykonane wyżej obliczenia innych układów statycznie niewyznaczalnych, w szczególności belek i ram.



Rys. 302.

Gdy chodzi o symetryczne łuki bezprzegubowe, to obliczenie wykonujemy według następującego schematu: odrzucamy myślowo utwierdzenie prawej podpory łuku B (rys. 302), obliczamy przesunięcia u , v i obrót ω

w tym punkcie i ustawiamy równania:

$$\omega_B = 0 \quad u_B = 0 \quad v_B = 0 \quad (540)$$

Wpływ prawej podpory na odkształcenia łuku wyraża się w danem zagadnieniu zapomocą momentu M_B i siły N_B (rys. 302), które możemy wyznaczyć, jak i wszystkie inne wielkości M i N w łuku, ze wzorów (500) i (501) zapomocą H , R_A i M_A . W sposób wyraźny wielkości M_B i N_B do rozwiązania nie wprowadzamy, lecz przyjmujemy za wielkości statycznie niewyznaczalne wielkości H , R_A i M_A ze względu na związany z tem dogodny sposób wyzyskania osi współrzędnych z rys. 299. Trzy wielkości statycznie niewyznaczalne zadania obliczamy z trzech równań (540).

Wobec tego, że początkowy przekrój A łuku jest utwierdzony, kąt jego obrotu $\omega_0 = 0$, a równanie (530) przybiera postać następującą:

$$\int_0^s \Delta d\varphi = 0$$

Ponieważ współrzędne punktu B są odpowiednio równe $a=l$ i $b=0$, równanie (536) przekształca się w następujące:

$$-\int_0^s \Delta ds \sin \varphi + \int_0^s (l-x) \Delta d\varphi = 0,$$

które ulega dalszemu uproszczeniu wobec tego, że $\int_0^s \Delta d\varphi = 0$

Ostatecznie nadajemy trzem równaniom (540) następującą formę:

$$\int_0^s \Delta d\varphi = 0 \quad (541)$$

$$\int_0^s y \Delta d\varphi - \int_0^s \Delta ds \cos \varphi \pm \int_0^l t x dx = 0 \quad (542)$$

$$\int_0^s x \Delta d\varphi + \int_0^s \Delta ds \sin \varphi = 0 \quad (543)$$

W razie łuku nie tylko symetrycznego, lecz również symetrycznie obciążonego mamy do wyznaczenia dwie tylko wielkości statycznie niewyznaczalne, mianowicie, H i M_A , gdyż reakcja R równa się w tym wy-

padku połowie obciążenia. Zamiast równań (540) możemy tu ustawić dwa równania

$$u_c = 0 \quad i \quad \omega_c = 0 \quad (540')$$

gdzie u_c oznacza poziome przesunięcie przekroju zwornikowego a ω_c obrót tegoż przekroju. Po przekształceniu równania (540') doprowadzają do tych samych, co wyżej, równań (542) i (541), w których całki mają być brane w granicach od 0 do $\frac{s}{2}$.

We wzory (541) — (543) wstawiamy zamiast Δds i $\Delta d\varphi$ ich wartości ze wzorów ściślejszych (516) i (518) lub też z uproszczonych wzorów (516'). To ostatnie możliwe jest tylko dla łuków o małej krzywiznie, co ma jednak w praktyce inżynierskiej miejsce najczęściej. W razie łuków o dużej krzywiznie (np. w razie sklepionych przepustów) musimy uciekać się do wzorów ściślejszych.

Równania (541) — (543) przybierają po uwzględnieniu wpływu temperatury i po zastosowaniu dla $\Delta d\varphi$ i Δds wzorów uproszczonych:

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds \quad i \quad \Delta ds = \frac{N}{EA} ds$$

postać następującą (rys. 303):

$$\int_0^s \frac{M}{EJ} ds = 0 \quad (544)$$

$$\int_0^s \frac{My}{EJ} ds - \int_0^s \frac{N \cos \varphi}{EA} ds \pm \int_0^l t x dx = 0 \quad (545)$$

$$\int_0^s \frac{Mx}{EJ} ds + \int \frac{N \sin \varphi}{EA} ds = 0 \quad (546)$$

Wstawiając tu zamiast N i M wartości ich wzięte z ogólnych równań równowagi odcinka łuku (500) i (501):

$$N = R_A \sin \varphi + H \cos \varphi - \mathfrak{N}$$

$$M = M_A + R_A \cdot x - H y - \mathfrak{M}$$

otrzymujemy:

$$M_A \int_0^s \frac{ds}{J} + R_A \int_0^s \frac{x ds}{J} - H \int_0^s \frac{y ds}{J} - \int_0^s \frac{M ds}{J} = 0 \quad (544')$$

$$\begin{aligned} M_A \int_0^s \frac{y ds}{J} + R_A \int_0^s \frac{xy ds}{J} - H \int_0^s \frac{y^2 ds}{J} - \int_0^s \frac{M y ds}{J} - \\ - R_A \int_0^s \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi ds}{A} - H \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{A} + \\ + \int_0^s \frac{M \cos \varphi ds}{A} \pm \int_0^l E \kappa t dx = 0 \end{aligned} \quad (545')$$

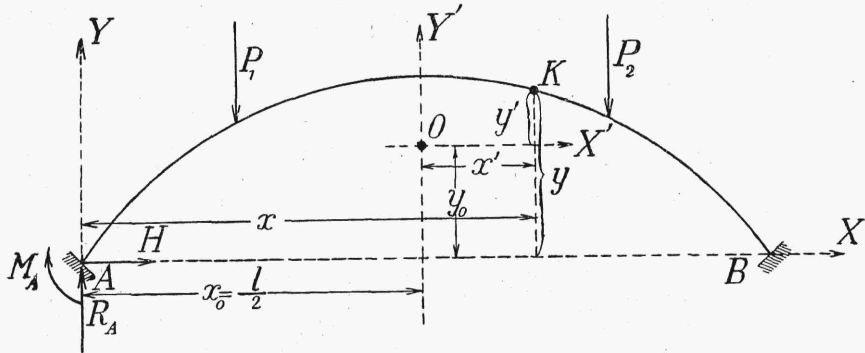
$$\begin{aligned} M_A \int_0^s \frac{x ds}{J} + R_A \int_0^s \frac{x^2 ds}{J} - H \int_0^s \frac{xy ds}{J} - \int_0^s \frac{M x ds}{J} + \\ + R_A \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{A} + H \int_0^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{A} - \int_0^s \frac{M \sin \varphi ds}{A} = 0 \end{aligned} \quad (546')$$

Z powyższych 3 równań 3 niewiadome M_A , R_A i H mogą być wyznaczone bez trudności, o ile są obliczone całki, wchodzące w te równania. Gdy oś łuku przedstawiona jest w formie równania $f(x, y) = 0$, możemy obliczyć ds bezpośrednio. Dzięki temu w niektórych wypadkach szczególnych np. w wypadku łuków parabolicznych o przekroju niezmiennym, wszystkie całki powyższe mogą być obliczone przy pewnych założeniach upraszczających na podstawie reguł rachunku całkowego. Naogół w obliczeniu całek (544') — (546') musimy uciekać się jednak do przybliżeń.

Robimy to w sposób następujący. Dzielimy oś łuku na równe odcinki Δs , które mają zastąpić nieskończenie małe odcinki ds ; dla każdego poszczególnego odcinka znajdujemy średnie J ; poszczególne całki np.

$\int_0^s \frac{x ds}{J}$ lub $\int_0^s \frac{xy ds}{J}$ zastępujemy przez sumy $\sum_0^s \frac{x \Delta s}{J}$ lub $\sum_0^s \frac{xy \Delta s}{J}$, które

powinny być obliczone sposobem Cotes'a lub Simpson'a, mogą jednak bez wielkiej straty na ścisłości być zamienione również i przez zwykłe sumy.



Rys. 303.

Obliczenie całek opisanym sposobem wymaga znacznego nakładu pracy, chodzi więc o możliwe zredukowanie ich liczby, co może być osiągnięte należytem dobraniem osi współrzędnych¹⁾. W tym celu początek współrzędnych przenosimy z punktu A do punktu O (rys. 303), którego współrzędne przy dawnych osiach równe są:

$$x_0 = \frac{l}{2} \quad y_0 = \frac{\int_0^s y \frac{ds}{J}}{\int_0^s \frac{ds}{J}} \quad (547)$$

Zwroty osi zachowujemy te same, co poprzednio. Stare współrzędne wyrażają się przez nowe w następujący sposób:

$$x = x' + \frac{l}{2} \quad y = y' + y_0 \quad (548)$$

Zmieniamy współrzędne w równaniach (542), (543), (501):

$$\int_0^s (y' + y_0) \Delta d\varphi - \int_0^s \Delta ds \cos \varphi \pm \int_0^l \kappa t dx' = 0 \quad (549)$$

$$\int_0^s (x' + \frac{l}{2}) \Delta d\varphi + \int_0^s \Delta ds \sin \varphi = 0 \quad (550)$$

¹⁾ Taką zmianę współrzędnych stosowali E. Mörsch (vid. H. Schlüter, „Eisenbeton“, 1920, str. 364) i R. Schönhöfer (vid. jego „Statische Untersuchungen von Bogen und Wölbtragwerken“, 1915).

$$M = M_A + R_A x' + R_A \frac{l}{2} - Hy' - Hy_0 - \mathfrak{M} \quad (551)$$

Wprowadzamy oznaczenie:

$$M_A^0 = M_A + R_A \frac{l}{2} - Hy_0 \quad (552)$$

i bierzemy pod uwagę, że

$$\int_0^s y_0 \Delta d\varphi = y_0 \int_0^s \Delta d\varphi = 0$$

$$\int_0^s \frac{l}{2} \Delta d\varphi = \frac{l}{2} \int_0^s \Delta d\varphi = 0$$

gdyż

$$\int_0^s \Delta d\varphi = 0$$

Wobec tego równania (549) — (551) przekształcają się w następujące:

$$\int_0^s y' \Delta d\varphi - \int_0^s \Delta ds \cos \varphi \pm \int_0^s x t dx' = 0 \quad (553)$$

$$\int_0^s x' \Delta d\varphi + \int_0^s \Delta ds \sin \varphi = 0 \quad (554)$$

$$M = M_A^0 + R_A x' - Hy' - \mathfrak{M} \quad (555)$$

Wstawiamy w dalszym ciągu w równania (553) i (554) wielkości N i M , przyczem tę ostatnią według wzoru (555).

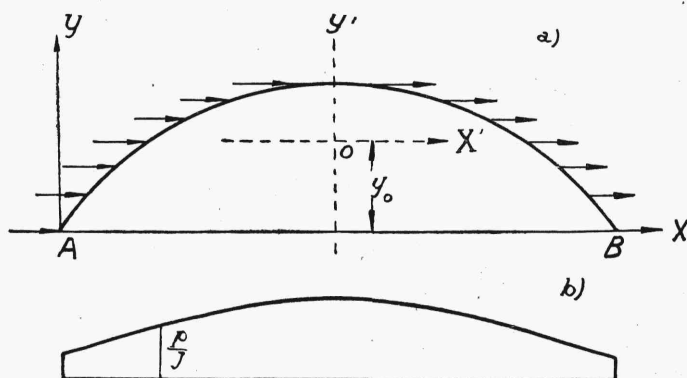
Drogą zamiany współrzędnych otrzymujemy zamiast równań (544'), (545') i (546') równania następujące, które co do formy różnią się od poprzednich tylko tem, że zamiast x i y mamy w nich litery x' i y' i że zamiast M występuje w nich M_A^0 :

$$M_A^0 \int_0^s \frac{ds}{J} + R_A \int_0^s \frac{x' ds}{J} - H \int_0^s \frac{y' ds}{J} - \int_0^s \frac{\mathfrak{M} ds}{J} = 0 \quad (544'')$$

$$M_A^0 \int_0^s \frac{y' ds}{J} + R_A \int_0^s \frac{x' y' ds}{J} - H \int_0^s \frac{y'^2 ds}{J} - \int_0^s \frac{\mathfrak{M} y' ds}{J} -$$

$$\begin{aligned}
 & - R_A \int_0^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{A} - H \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{A} + \\
 & + \int_0^s \frac{\mathfrak{N} \cos \varphi ds}{A} \pm \int_0^l E \kappa t dx = 0 \quad (545'')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & M_A^0 \int_0^s \frac{x' ds}{J} + R_A \int_0^s \frac{x'^2 ds}{J} - H \int_0^s \frac{x' y' ds}{J} - \\
 & - \int_0^s \frac{\mathfrak{M} x' ds}{J} + R_A \int_0^s \frac{\sin^2 \varphi ds}{A} + \\
 & + H \int_0^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{A} - \int_0^s \frac{\mathfrak{N} \sin \varphi ds}{A} = 0 \quad (546'')
 \end{aligned}$$



Rys. 304.

Początek nowych osi współrzędnych, ustalony przez równania (547), możemy rozpatrywać, jako punkt zaczepienia wypadkowej sił rozłożonych na łuku w sposób ciągły i skierowanych poziomo równoległe do osi X -ów (rys. 304), przy czem obciążenie jednostkowe uwidocznione na

wykresie 304 b, wyniesie $\frac{p}{J}$ k/m. b (p — wielkość stała). Wówczas w nowym układzie osi współrzędnych $X'OY'$, całka

$$\int_0^s y' \cdot \frac{ds}{J} = 0$$

jako moment statyczny sił $\frac{p}{J}$ względem ich środka ciężkości (p tu skracamy).

O ile, zamiast sił poziomych przedstawionych na rys. 304, wyobrazimy sobie siły pionowe $\frac{p}{J}$ t. j. równoległe do osi OY , wówczas znajdziemy analogicznie do poprzedniego, że

$$\int_0^s x' \cdot \frac{ds}{J} = 0$$

Jednocześnie, ze względu na symetrię łuku względem osi OY' , mamy, że

$$\int_0^s x' y' \frac{ds}{J} = 0 \quad (556)$$

Wreszcie dla łuków niezbyt wyniosłych zakładamy $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$. W rezultacie równania (545), (546) i (544) przybierają następującą postać:

$$-H \int_0^s \frac{y'^2 ds}{J} - \int_0^s \frac{\mathfrak{M} y' ds}{J} - H \int_0^s \frac{ds}{A} \pm \int_0^l E \kappa t dx' = 0$$

skąd:

$$H = - \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} y' ds}{J} \pm E \kappa t l}{\int_0^s \frac{y'^2 ds}{J} + \int_0^s \frac{ds}{A}} \quad (557)$$

$$R_A \int_0^s \frac{x'^2 ds}{J} - \int_0^s \frac{\mathfrak{M} x' ds}{J} = 0$$

skąd:

$$R_A = \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} x' ds}{J}}{\int_0^s \frac{x'^2 ds}{J}} \quad (558)$$

$$M_A^0 \int_0^s \frac{ds}{J} - \int_0^s \frac{\mathfrak{M} ds}{J} = 0$$

skąd:

$$M_A^0 = \frac{\int_0^s \frac{\mathfrak{M} ds}{J}}{\int_0^s \frac{ds}{J}} \quad (559)$$

Zastępujemy we wzorach (557) — (559) całki przez sumy.

Ponieważ różniczki ds zastępujemy tu przez odcinki Δs równe sobie, otrzymujemy więc:

$$H = - \frac{\sum \mathfrak{M} y' \frac{1}{J} \pm \frac{Ex t l}{\Delta s}}{\sum_0^s y'^2 \frac{1}{J} + \sum_0^s \frac{1}{A}} \quad (560)$$

$$R_A = \frac{\sum_0^s \mathfrak{M} x' \frac{1}{J}}{\sum_0^s x'^2 \frac{1}{J}} \quad (561) \quad M_A^0 = \frac{\sum_0^s \mathfrak{M} \cdot \frac{1}{J}}{\sum_0^s \frac{1}{J}} \quad (562)$$

Wzór (547) przekształca się odpowiednio w następujący:

$$y_0 = \frac{\sum y' \frac{1}{J}}{\sum \frac{1}{J}} \quad (563)$$

Obliczenie odbywać się może np. w następującym porządku:

1° Dzielimy łuk na równe części Δs i numerujemy je.

2° Znajdujemy \mathfrak{M} względem środków odcinków Δs .

3° Znajdujemy J dla środków odcinków.

4° Znajdujemy odpowiednie $\frac{1}{J}$.

5° Wypisujemy z rysunku lub wyznaczamy x i y i obliczamy y_0 .

6° Obliczamy iloczyny $x' \cdot \frac{1}{J}$, $y' \cdot \frac{1}{J}$, $x'^2 \cdot \frac{1}{J}$, $y'^2 \cdot \frac{1}{J}$.

7° Obliczamy A i $\frac{1}{A}$.

8° Znajdujemy dla środków odcinków Δs kąty φ i siły \mathfrak{N} .

9° Obliczamy iloczyny $\frac{\mathfrak{M} y'}{J}$, $\frac{\mathfrak{M} x'}{J}$, $\frac{\mathfrak{M}}{J}$.

10° Obliczamy sumy i ilorazy wskazane we wzorach (560) — (563).

Przykład tego rodzaju obliczenia łuku bezprzegubowego podany jest w § 9 tego rozdziału.

W razie łuku symetrycznego i symetrycznie obciążonego obliczenie może być wykonane tylko dla połowy łuku, według równań (540'). W tym wypadku nie możemy jednak korzystać z uproszczeń, wynikających z przeniesienia początku $O(x_0, y_0)$ współrzędnych według opisanego sposobu, gdyż całki

$$\int_0 y' \frac{ds}{J} \quad \int_0 x' \frac{ds}{J} \quad \text{oraz} \quad \int_0 x' y' \frac{ds}{J}$$

wzięte dla połowy łuku nie będą się równały zeru.

W łukach bardzo wyniosłych nie możemy zakładać, że $\sin \varphi = 0$, a w równaniach (544'') — (546'') musimy uwzględnić wówczas wyrazy zawierające $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ i \mathfrak{N} . Będziemy tu mieli w takim razie jeszcze do

obliczenia sumy w rodzaju $\sum_0^s \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{A}$ i do rozwiązania równania lin-

jowe (544'') — (546'') względem M_A^0, R_A i H .

Stosowanie powyższego uproszczenia jest jeszcze możliwe przy $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$, kiedy błąd w naprężeniach nie przekracza tu 10%.

Liczba odcinków, na które dzielimy łuk, zwykle wynosi 10 — 20, co zależy od stopnia pożądanej ścisłości i od rozpiętości łuku.

Dzielenie na kliny wykonywamy naogół zapomocą płaszczyzn normalnych do osi łuku i tylko w łukach bardzo mało wyniosłych można zastąpić te płaszczyzny przez płaszczyzny pionowe.

Łuk bezprzegubowy o małej wyniosłości i o kształcie paraboli, może być obliczony bez potrzeby uciekania się do przybliżonego wyznaczenia całek określonych, wchodzących w równania (544) — (546).

Łuk taki odnosimy do współrzędnych, przedstawionych na rys. 305, nie przenosząc więc początku współrzędnych do punktu, określonego wzorami (547).

Wprowadzenie nowego układu współrzędnych nie byłoby tu korzystnem, gdyż zwalniałoby nas wprawdzie od potrzeby wyznaczenia niektórych całek, wchodzących w równania (544'') — (546''), wprowadzałoby natomiast pewną liczbę nowych całek przez skomplikowanie równania paraboli.

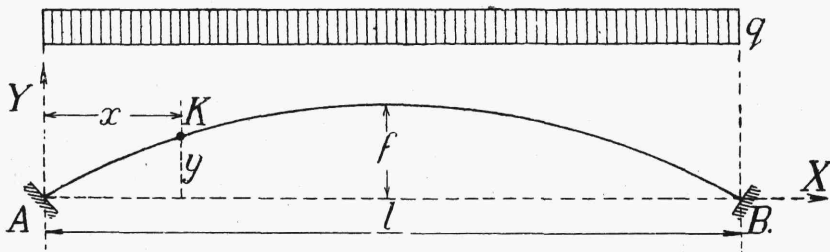
Przyjmujemy, że łuk jest cały obciążony w sposób równomierny i że $J = \text{const}$, $A = \text{const}$, $E = \text{const}$, $t = 0$, skąd wobec symetrii łuku wynika, że

$$R_A = R_B = q \frac{l}{2}$$

Dla łuku o małej wyniosłości (poczynając np. od $f = \frac{1}{10} l$ lub $f = \frac{1}{12} l$)

przyjąć możemy, że nieskończenie mały odcinek łuku ds równa się swemu rzutowi na oś X -ów, czyli że $ds = dx$. Pozatem, jak wyżej, przyjmujemy we wzorach dla wielkości statycznie niewyznaczalnych łuku, że

$$\cos \varphi = 1 \quad \sin \varphi = 0 \quad \text{ i } \quad \mathfrak{M} = \Sigma P \sin \varphi = 0$$



Rys. 305.

Dla momentów \mathfrak{M} otrzymujemy tu wzór następujący:

$$\mathfrak{M} = qx \cdot \frac{x}{2}$$

zaś dla rzędnych łuku wzór:

$$y = x(l - x) \frac{4f}{l^2}$$

w którym f oznacza strzałkę łuku a l jego rozpiętość.

Powyższe wyrażenia dla R_A , \mathfrak{M} i y wstawiamy w równania (544) i (545) skąd po wyznaczeniu bardzo prostych całek określonych znajdujemy:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{r^2}{f^2}}$$

$$M_A = - \frac{ql^2}{12} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{r^2}{f^2}} \right)$$

gdzie r oznacza promień bezwładności przekroju poprzecznego łuku.

W razie gdyby omówiony łuk był obciążony zapomocą jednej tylko siły skupionej P , zaczepionej w odległości a od lewej podpory, wówczas mielibyśmy, że w przekrojach, leżących na lewo od punktu zaczepienia siły P

$$\mathfrak{M} = 0$$

a w przekrojach położonych na prawo od tego punktu

$$\mathfrak{M} = P(x - a)$$

Dalsze obliczenie odbywałoby się według tego samego schematu, co dla łuku obciążonego równomiernie, mielibyśmy tu jednak korzystać ze wszystkich trzech równań (544) — (546), gdyż obciążenie nie byłoby symetrycznem.

Zauważyć należy, że wpływ sił podłużnych na odkształcenia łuków a więc i na wielkości statycznie niewyznaczalne jest większy niż w ramach. Tłómaczy się to tem, że łuki mają naogół kształt zbliżony do tego typu ramy, dla której wpływ sił podłużnych jest prawie największy (por. XII, rys. 284) i dlatego, że długość osi łuku jest tu większa, niż w ramie wspomnianego typu i odpowiedniej wyniosłości.

6. Łuki dwuprzegubowe, łuki ciągłe i pierścienie.

Poza łukami bezprzegubowymi z pośród konstrukcyj łukowych statycznie niewyznaczalnych miewamy najczęściej do czynienia z łukami dwu-