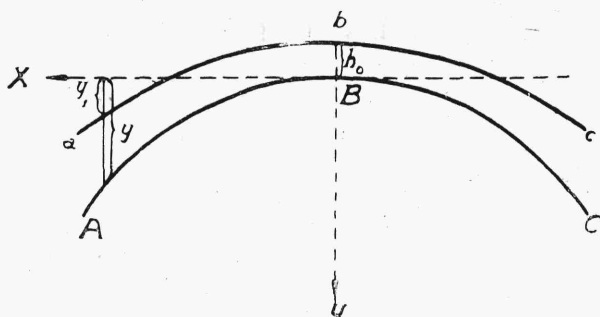


II. Kształt lin zwisających a najwłaściwszy kształt łuków.

Wyobraźmy sobie, że siły, działające na łańcuch przedstawiony na rys. 330, działają w sposób przedstawiony na rys. 332, t. j. w kierunku od



Rys. 332.

strony wypukłej ku wklęsłej. W tym wypadku, o ileby łańcuch mógł zachować swój kształt statecznie, siły podłużne N w nim byłyby ściskającymi.

Kształt, jaki otrzymałyby łańcuch pod działaniem sił zewnętrznych w danym wy-

wpadku, byłby ten sam, co w wypadku poprzednim i określałby się tem samym równaniem (603). Gdybyśmy łańcuch zastąpili tu przez pręt sprężysty nieskończenie cienki, mielibyśmy wówczas do czynienia z łukiem o nieskończenie małej grubości. Gdyby kształt takiego łuku odpowiadał równaniu (603), łuk ten nie byłby wcale zginany, a siła podłużna działałaby w każdym punkcie w kierunku stycznym. To też przy wyznaczeniu najwłaściwszego kształtu łuku, uważamy łuk za posiadający grubość nieskończenie małą i stosujemy równanie (603) do jego osi. W tym wypadku siły podłużne N powinny być styczne do osi łuku a krzywa ciśnień powinna się z osią łuku pokrywać. Poszczególne przekroje łuku będą tu wszystkie ściskane równomiernie, co daje najlepsze wyzyskanie materiału.

Określmy tu najwłaściwszy dla danego obciążenia kształt łuku lub kształt łańcucha (liny) zwisającego, co jest więc z tem zadaniem równoznaczne.

Krzywą ABC , odniesioną do układu współrzędnych XY , uważamy za oś łuku, krzywą abc w tym samym układzie za krzywą, ograniczającą od góry obciążenia sprowadzone (rys. 332). Różnica rzędnych pierwszej i drugiej krzywej daje rzędną obciążenia w danym punkcie łuku. Mamy więc:

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \gamma (y - y_1) \quad (604)$$

gdzie γ jest to ciężar jednostkowy muru.

Równanie (604) pozwala, z jednej strony, na wyznaczenie y , czyli kształtu łuku, najwłaściwszego dla danego obciążenia, z drugiej zaś, odwrotnie, na znalezienie tego rodzaju obciążenia, dla którego dany kształt byłby najwłaściwszy. Pierwsze zadanie wymaga zcałkowania równania (604) i nie zawsze jest możliwe, drugie daje się wykonać z większą łatwością.

W tym ostatnim wypadku obliczamy pochodną y'' i nadajemy równaniu (604) postać następującą:

$$y_1 = y - \frac{H}{\gamma} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad (605)$$

Oznaczamy dla zwornika: przez h_0 — wysokość obciążenia, a przez ρ_0 — promień krzywizny.

Ten ostatni otrzymujemy z ogólnego wzoru dla promienia krzywizny:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

który przybiera dla zwornika postać następującą:

$$\rho_0 = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0} \quad (606)$$

gdyż, przy $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Ze wzoru (606) wynika, że w zworniku

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho_0} \quad (607)$$

Zakładamy w równaniu (605) $y = 0$. Wówczas $y_1 = -h_0$, a cały wzór przekształca się w następujący:

$$H = \gamma \cdot h_0 \cdot \rho_0 \quad (608)$$

Przypuśćmy, że oś łuku ma kształt paraboli, wyrażającej się wzorem:

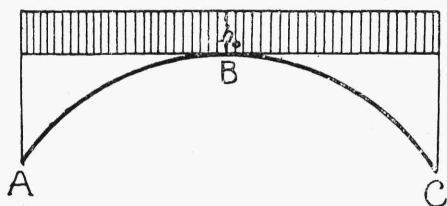
$$y = ax^2 \quad (609)$$

Wówczas otrzymujemy, że

$$\rho_o = \frac{1}{2a} \quad \text{i} \quad H = \frac{\gamma h_o}{2a} \quad (610)$$

i wreszcie, że krzywa obciążenia ma następujące równanie:

$$y_1 = ax^2 - \frac{2Ha}{\gamma} = ax^2 - h_o \quad (611)$$



Rys. 333.

Linia obciążenia jest więc w danym wypadku parabolą, równoległą do osi łuku i przesuniętą o h_o , co znaczy, iż, wzdłuż rzutu poziomego, parabolicznemu kształtowi łuku odpowiada obciążenie rozłożone równomiernie (rys. 333).

Dla tak zwanej krzywej łańcuchowej mamy, że:

$$y = k \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2 \right) \quad (612)$$

skąd dla zwornika:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho_o} = \frac{k}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \frac{2k}{a^2}$$

Wobec tego odległość biegunowa (w danym razie parcie poziome) równa się (według wzoru 608):

$$H = \gamma \cdot h_o \cdot \frac{a^2}{2k} \quad (613)$$

Z równania (605) otrzymujemy, że:

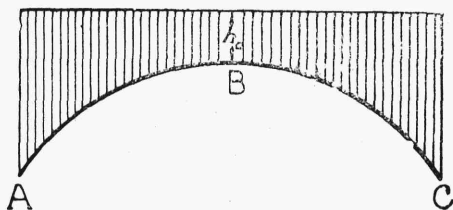
$$\begin{aligned} y_1 &= y - \gamma h_0 \cdot \frac{a^2}{2k} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{k}{a^2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \\ &= k \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2 \right) - \frac{h_0}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \\ &= \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \left(k - \frac{h_0}{2} \right) - 2k \end{aligned}$$

Przy $k = \frac{h_0}{2}$,

$$y_1 = -h_0 \quad (614)$$

Równanie (614) oznacza, że oś łuku ma kształt krzywej

$$y = \frac{h_0}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2 \right) \quad (615)$$



Rys. 334.

wówczas obciążenie jego ograniczone jest linią prostą, równoległą do osi X-ów i zmienia się wzdłuż rzutu poziomego łuku według reguły przedstawionej na rys. 334, gdzie krzywa ABC oznacza oś łuku.

Równanie (613) przybiera tu przy $k = \frac{h_0}{2}$ postać następującą:

$$H = \gamma \cdot h_0 \cdot \frac{a^2}{2 \cdot \frac{h_0}{2}} = \gamma \cdot a^2$$

skąd:

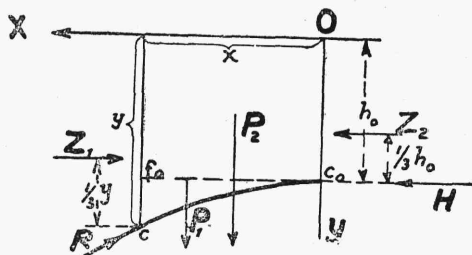
$$a = \pm \sqrt{\frac{H}{\gamma}}$$

tak, że ostatecznie mamy dla osi łuku, odpowiadającej obciążeniu według rys. 334, równanie:

$$y = \frac{h_0}{2} \cdot \left[e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}} - 2 \right] \quad (615')$$

Wyznamy wreszcie kształt krzywej, odpowiadającej łukowi, obciążonemu parciem ziemi, działającym zarówno w kierunku pionowym, jak i poziomym. Sam łuk uważamy tu za nieważki.

Niech więc będzie c_0c odcinkiem takiego łuku (rys. 335), liczonym od zwornika c_0 , a prosta OX niech będzie zarazem osią odciętych, jak i prostą, ograniczającą naziom.



Rys. 335.

Aby obliczyć objętość masy ziemnej nad odcinkiem c_0c , przyjmujemy narazie, że odcinek ten jest odcinkiem paraboli. Ciężar wspomnianej masy składa się z dwóch sił, z których siła P_1 odpowiada masie klina $c f_0 c_0$ a siła P_2 masie prostokąta nad tym klinem. Siła P_1 zaczepiona jest w odległości $\frac{3}{4}x$ od osi OY , jak to wynika z kształtu

klina, zaś siła P_2 w odległości $\frac{x}{2}$ od tej osi.

Prócz sił ciężkości na masę ziemną nad odcinkiem łuku c_0c działają z obydwóch stron poziome siły Z_1 i Z_2 , przedstawiające parcie pozostałej ziemi. Siły te zaczepione są w odległości $\frac{1}{3}y$ i $\frac{1}{3}h_0$ odpowiednio nad punktami c i c_0 (rozd. XVIII, 4).

Ustawiamy równanie równowagi $\Sigma M = 0$ dla odcinka c_0c łuku.

W tym celu przyrównujemy do zera sumę momentów, względem punktu c , sił, działających na łuk c_0c . Otrzymujemy w ten sposób:

$$- H(y - h_0) - Z_2(y - \frac{2}{3}h_0) + \frac{1}{2}P_2x + P_1\frac{3}{4}x + Z_1\frac{1}{3}y = 0$$

Po przeniesieniu początku współrzędnych do punktu c_0 , przy zachowaniu jednak tych samych kierunków osi, i po wstawieniu tu:

$$Z_1 = \frac{1}{2} \gamma y^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} \gamma h_0^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right)$$

gdzie γ oznacza ciężar jednostkowy ziemi a ϕ kąt stoku naturalnego, dochodzimy do następującego równania osi łuku:

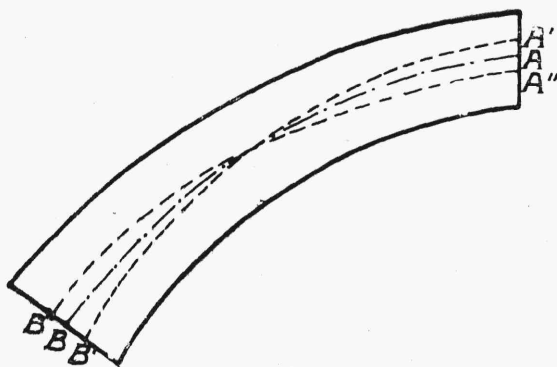
$$x_1^2 = \frac{2 y_1 \left[6 \cdot \frac{H}{\gamma} - y_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) \left(3 h_0 + y_1 \right) \right]}{6 h_0 + y_1} \quad (616)$$

jest to równanie hiperboli trzeciego stopnia.

Parcie poziome w łuku H odgrywa tu rolę parametru, który może być łatwo wyznaczony, o ile dana jest rozpiętość łuku l i jego strzałka f :

$$\frac{H}{\gamma} = \frac{l^2}{8} \left(\frac{h_0}{f} + \frac{1}{6} \right) + \frac{\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right)}{2} \cdot f^2 \left(\frac{h_0}{f} + \frac{1}{3} \right) \quad (617)$$

W wypadku nasypu bardzo wysokiego możemy przyjąć, że $y_1 = y - h_0$ jest bardzo małe w stosunku do $3h_0$ i $6h_0$, wobec czego równanie (616) przybiera postać równania elipsy.



Rys. 336.

Wyznaczenie najwłaściwszego kształtu łuku dotyczy wogóle tylko wypadku obciążenia ciągłego i stałego. Aby jednak i w wypadku obciążenia ruchomego momenty zginające w łuku były jaknajmniejsze, zarysowujemy łuk najczęściej według obciążenia stałego i połowy największego obciążenia ruchomego, rozłożonego na łuku równomiernie. Na rys. 336, linja

AB oznacza krzywą ciśnień przy takim właśnie obciążeniu i jednocześnie oś łuku, krzywa $A'B'$ krzywą ciśnień przy obciążeniu ruchomem równomiernie rozłożonem na całym łuku, a krzywa $A''B''$ krzywą ciśnień przy obciążeniu tylko stałym.

Przyjęcie obciążenia stałego i połowy ruchomego dla wyznaczenia osi zapewnia więc możliwie małe momenty zginające w łuku.

Znajdowanie najwłaściwszego kształtu łuku dla danego obciążenia odbywa się zwykle w następujący sposób:

Budujemy krzywą ciśnień dla łuku o dowolnej narazie osi w ten sposób, aby przeszła ona przez środki ciężkości przekroju węzłowego i zwornikowego, t.j. tak jak w łuku trójpřegubowym.

Otrzymaną linję ciśnień przyjmujemy za nową oś łuku i powtarzamy wykreślenie krzywej ciśnień; tą nową linję ciśnień przyjmujemy znowu za oś łuku i t.d., dopóki krzywa ciśnień nie pokryje się całkowicie z osią łuku.
