

## ROZDZIAŁ VIII.

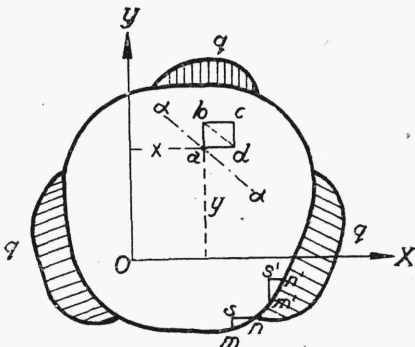
# Równania równowagi sprężystej w płaszczyźnie i wykresy naprężeń.

### I. Równowaga prostopadłościanu, jako zadanie płaskie.

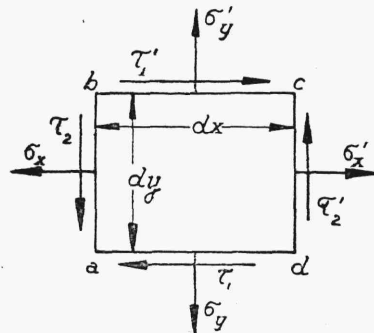
Naprężenia, obliczane we wszystkich poprzednich rozdziałach, były zgóry poddane pewnym określonym prawom, według których się zmieniały. Tak więc np. mieliśmy równomierny rozkład naprężeń przy wyciąganiu lub linjowy przy zginaniu. Obecnie podamy sposób obliczenia dotyczący naprężeń, zmieniających się według dowolnej reguły.

Rozpatrujemy płaski układ naprężeń, do którego sprowadza się ogromna większość zagadnień mechaniki budowli.

Wyobraźmy sobie wałek sprężysty o ciężarze gatunkowym  $\gamma$  i o przekroju wskazanym na rys. 152. Siły  $q$  uważamy za ciągłe obciążenie w kierunku prostopadłym do osi walca. W kierunku osi żadne siły tu nie działają.



Rys. 152.



Rys. 153.

Bierzemy część walca o długości 1 (grubości) i ustawiamy równania dla naprężeń w punkcie  $a^1$ ). Chodzi o naprężenia, działające na płaszczyzny równoległe do osi  $OX$  i  $OY$ .

Weźmy prostokąt, przylegający do punktu  $a$ , o bokach równoległych do osi  $OX$  i  $OY$  i odpowiednio równych  $dx$  i  $dy$  (rys. 152). Przyjmujemy że naprężenia działające na płaszczyzny  $ab$ ,  $bc$  i t.d. są rozłożone równomiernie, co jest jednak tylko możliwe wobec małych długości boków prostokąta  $abcd$ . Oznaczamy te naprężenia w sposób następujący (rys. 153):

dla płaszczyzny	$ab$ ,	normalne przez	$\sigma_x$ ,	styczne przez	$\tau_2$	
"	"	$bc$ ,	"	"	$\sigma'_y$ , " "	$\tau'_1$
"	"	$cd$ ,	"	"	$\sigma'_x$ , " "	$\tau'_2$
"	"	$da$ ,	"	"	$\sigma_y$ , " "	$\tau_1$

Założywszy, że naprężenia zmieniają się w danym ciele w sposób ciągły i że zwiększają się w kierunku osi współrzędnych, musimy przyjąć, że naprężenia, działające na równoległe do siebie boki nieskończenie małego prostokąta  $abcd$ , mogą się różnić tylko o wielkości nieskończenie małe czyli, że:

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \sigma_x + d\sigma_x \\ \sigma'_y &= \sigma_y + d\sigma_y \\ \tau'_1 &= \tau_1 + d\tau_1 \\ \tau'_2 &= \tau_2 + d\tau_2\end{aligned}\tag{247}$$

Skoro całe ciało sprężyste znajduje się w równowadze, to w równowadze również musi się znajdować i prostopadłościan  $abcd$ , czyli że muszą mieć miejsce następujące równania statyki (rys. 152):

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma M = 0 \tag{248}$$

Momenty obliczamy tu względem punktu  $c$ , wobec czego trzecie z równań (248) przybiera postać następującą:

$$\begin{aligned}\Sigma M &= \tau_1 dy dx - \tau_2 dy dx + (\sigma'_y - \sigma_y) \frac{dx^2}{2} - \\ &- (\sigma'_x - \sigma_x) \frac{dy^2}{2} - \gamma dx dy \frac{dx}{2} = 0\end{aligned}$$

które upraszcza się na podstawie równań (247):

<sup>1)</sup> Obszerniej o tem po polsku powiedziane jest np. w pracy: H. Jewniewicz, „Teorja sprężystości“, 1910 str. 31.

$$\begin{aligned} \Sigma M = \tau_1 dy dx - \tau_2 dy dx + d\tau_y \frac{dx^2}{2} - \\ - d\tau_x \frac{dy^2}{2} - \gamma dx dy \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (249)$$

gdzie  $\gamma$  oznacza ciężar gatunkowy danego ciała.

Trzy ostatnie wyrazy równania (249) są wielkościami nieskończenie małymi wyższego rzędu, niż dwa pierwsze, możemy więc uznać je za równe zeru. Otrzymujemy stąd dawniej już wyprowadzoną zależność  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$  (rozdz. VII, 4).

Dwa pierwsze równania (248) przybierają postać następującą:

$$\begin{aligned} \Sigma X = (\tau_x + d\tau_x) dy - \tau_x dy + \\ + (\tau_1 + d\tau_1) dx - \tau_1 dx = 0 \\ \Sigma Y = (\tau_y + d\tau_y) dx - \tau_y dx + (\tau_2 + d\tau_2) dy - \\ - \tau_2 dy - \gamma dx dy = 0 \end{aligned} \quad (250)$$

a po uproszczeniu:

$$d\tau_x dy + d\tau_0 dx = 0 \quad (251)$$

$$d\tau_y dx + d\tau_0 dy = \gamma dx dy \quad (252)$$

Napężenie  $\tau_x$  zmienia się dla poszczególnych punktów walca zarówno w zależności od  $x$ , jak i od  $y$ , t.j.  $\tau_x = F(x, y)$ , w danym jednak punkcie  $a$  przy przejściu od boku  $ab$  prostokąta  $abcd$  do boku przeciwległego  $cd$  zmienia się tylko w zależności od  $x$ , gdyż przyjęliśmy, że wzdłuż boków prostokąta rozkłada się równomiernie, czyli niezależnie od  $y$ . Skoro więc w równaniu  $\tau_x = F(x, y)$  mamy  $y$  uważać za wielkość stałą, to różniczka zupełna napężenia  $\tau_x$  przybierze tu postać:

$$d\tau_x = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \cdot dx$$

lub postać:

$$d\tau_x = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} \cdot dx \quad (253)$$

Powtórzywszy powyższe rozumowanie w zastosowaniu do naprężeń  $\tau_y$  i  $\tau_0$  i wyznaczywszy stąd  $d\tau_y$  i  $d\tau_0$ , nadajemy równaniom (251) i (252) następującą formę:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_0}{\partial y} = 0 \quad (254)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_0}{\partial x} = \gamma \quad (255)$$

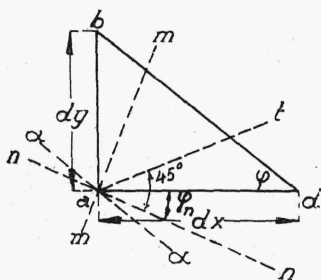
Równania te należy rozumieć w ten sposób, iż wiążą one ze sobą w dowolnym punkcie walca naprężenia normalne i styczne, równoległe do osi współrzędnych i działające na przeprowadzone przez ten punkt płaszczyzny w nieskończenie bliskim sąsiedztwie od niego. Rozwiązanie tych równań omówione jest w rozdz. XIX i XX.

Równania wiążące ze sobą naprężenia, działające na wszystkie sześć boków nieskończenie małego prostopadłościanu t.j. przedstawiające przestrzenny, czyli trójwymiarowy układ naprężeń, są omówione niżej w teorii płyt (rozdz. XX, 1).

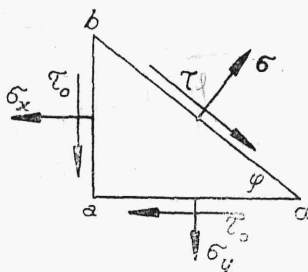
## 2. Równowaga graniastosłupa trójkątnego.

Gdy chodzi o naprężenia, działające na płaszczyzny nachylone względem osi współrzędnych pod kątem ostrym, lub gdy chcemy obliczyć naprężenia walca, omówionego w § 1, w okolicach obwodu (rys. 152), wówczas wychodzimy z warunków równowagi graniastosłupa trójkątnego np. graniastosłupa  $abd$ ,  $smn$  lub  $s'm'n'$  o długości (grubości) w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku, równej 1.

Bierzemy więc graniastosłup trójkątny  $abd$  (por. rys. 152) i ustalamy, że naprężenia, działające na płaszczyznę  $bd$  (rys. 154) będą się tylko o wielkości nieskończenie małe różniły od naprężeń, działających na płaszczyznę  $aa$  do  $bd$  równoległą (tak jak np.  $\sigma_x$  różniło się w zadaniu poprzednim od  $\sigma'_x$ ); dla-



Rys. 154.



Rys. 155.

tego też uważać będziemy naprężenia działające na  $bd$ , jako naprężenia w punkcie  $a$ . Naprężenia, działające na wszystkie ściany graniastosłupa  $abd$ , uważamy za rozłożone równomiernie. Pola ścian  $ab$  i  $ad$  równe są odpowiednio  $dy$  i  $dx$ , a naprężenia działające na nie są to  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2$  (rys. 153).