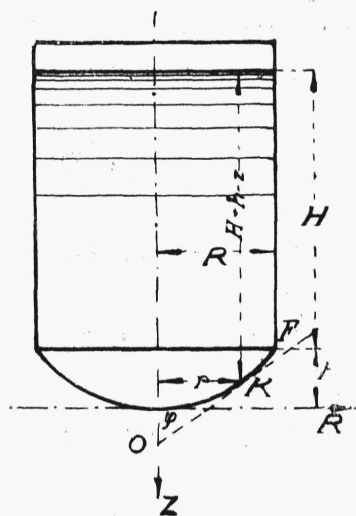


tylko parabolicznej części zbiornika. Dla części cylindrycznej otrzymujemy w miejscu połączenia jej z częścią paraboliczną ze wzoru (1056), że:



Rys. 465.

$$\sigma' = \frac{rp}{a} = \frac{r\gamma H}{a} \quad (1074)$$

Z porównania wzorów (1074) i (1073) widzimy, że około miejsca, gdzie część cylindryczna zbiornika przechodzi w paraboliczną, w obydwóch częściach otrzymujemy różne naprężenia. Z równania (1056) wynika, że przy  $\rho'' = 0$  t. j. w miejscu załamania się przekroju południkowego  $\sigma' = \infty$  czyli, że w punktach *F* (na rys. 465) otrzymujemy naprężenia równoleżnikowe bardzo wielkie i z tego powodu musimy wzdłuż obwodu zbiornika w tem miejscu ustawić specjalny pierścień wzmacniający.

## 5. Zbiorniki grubościenne z dnem nieodkształcalnem.

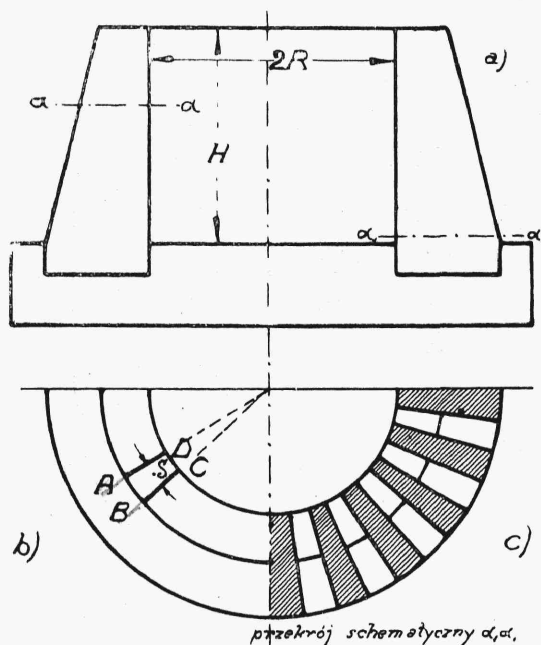
Gdy chodzi o niewielkie zbiorniki murowane, betonowe i żelazobetonowe, to dno ich, ze względu na fundamentowanie, musi być przeważnie tak znacznych wymiarów, że parcie cieczy na ściany zbiornika nie wywołuje naogół odkształcenia dna, możemy więc uważać, że dolne przekroje końcowe ścian nie mogą się obracać. Zbiorniki tego rodzaju mają zwykle kształt cylindryczny (rys. 466). Obliczenie ich opiera się na następujących założeniach<sup>1)</sup>.

1°. Przyjmujemy, że w każdym przekroju wycinka południkowego *ABCD* wypadkowa poziomych sił wewnętrznych przechodzi przez jego środek *S* (na rys. 466b). Założenie to jest równoznaczne z założeniem, że naprężenia równoleżnikowe w ścianach rozłożone są wewnątrz ścian równomiernie na ich grubości w każdym przekroju, co ściśle ma miejsce tylko w ścianach nieskończenie cienkich. Naprężenia w grubościennych walcach zostały obliczone przez Lamé'go w wypadku walca nieograniczonego poprzecznie, co w danym wypadku nie ma jednak miejsca. Porównanie rezultatów obliczenia walca cienkościennego z rozwiązaniem Lamé'go,<sup>2)</sup> dla

<sup>1)</sup> Por. T. Pöschl u. K. Terzaghi, „Berechnung von Behältern“, 1913.

<sup>2)</sup> M. G. Lamé. „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides“, 1866, str. 188.

stosunku grubości ściany do średnicy walca 1:10, wykazuje różnicę w naprężeniach, dochodzącą do 10%. Cyfra ta daje pewne pojęcie o błędzie, jaki powoduje założenie, dotyczące sił poziomych, w zbiornikach z dnami. Ponieważ jednak przyjęty tu stosunek 1:10 należy uważać dla zbiorników za duży, w wypadkach średnich popełniamy błąd naogół mniejszy. Zresztą, przy ustalaniu bezpiecznych naprężeń, powinniśmy powyższą nieścisłość mieć na uwadze.



Rys. 466.

2°. Sztywność w kierunku poziomym wycinka południkowego ściany, o całej wysokości zbiornika ( $H$ ), uważamy za równą w każdym przekroju sztywności płyty o tej samej szerokości ( $b$ ), długości ( $H$ ) i przekroju podłużnym (rys. 467). Dotyczy to tylko małych wielkości  $b$ , przyczem sztywność mierzy się w danym punkcie iloczynem  $EJ_z$  równym

$$EJ_z = \frac{EJ}{1 - \mu^2} = \frac{Ea^3b}{12(1 - \mu^2)} \quad (107c)$$

gdzie  $J$  oznacza moment bezwładności wycinka płyty o szerokości  $b$ .

Po przyjęciu dwóch powyższych założeń dochodzimy niejako do schematu statycznego zginania belek o momencie bezwładności  $J_z$ , utwier-

dzonych w końcu i poszczepianych ze sobą wzdłuż osi podłużnej (na rys. 466c belki te są uwidocznione w przekroju poziomym). W ten sposób powstają naprężenia południkowe różne dla różnych punktów grubości ściany i równoleżnikowe niezależne bezpośrednio od tej grubości.

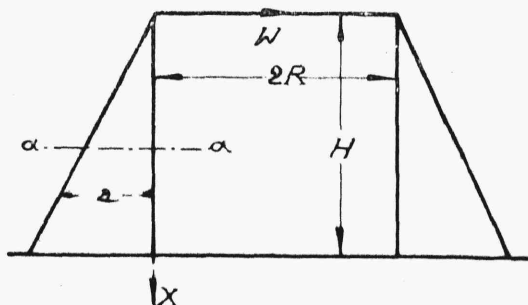
Obliczenie prowadzimy metodą przybliżoną Ritz'a i Timoszenki, opartą na równaniu następującem (vid. rozdz. XVI,8):

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = 0$$

Obliczamy tu zbiornik o trójkątnym przekroju poprzecznym ścian. Osie współrzędnych bierzemy według rys. 468. Grubość ściany zmienia się według wzoru

$$a = m x \quad (1076)$$

gdzie  $m$  jest to współczynnik kątowy równania prostej.



Rys. 468.

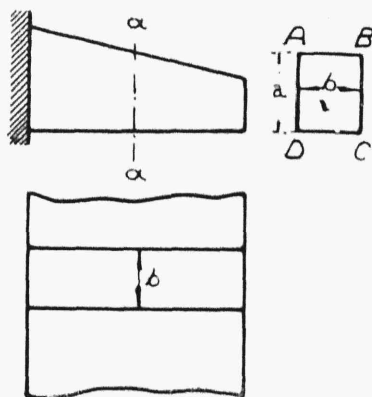
O ile przez  $M_x$  oznaczmy moment zginający w pewnym przekroju  $xx$  ściany, wówczas energia sprężysta cząstkowa, wywołana zginaniem w płaszczyźnie południkowej i odpowiadająca odcinkowi o długości  $dx$  i szerokości 1, równa się (por. rozdz. XVI,2)

$$dV_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x^2}{EJ_x} dx \quad (1077)$$

Energja sprężysta, odpowiadająca objętości  $1 a dx$ , a powstała przy wyciąganiu lub ściskaniu przekrojów południkowych zbiornika, równa się (rozd. XVI,1):

$$dV_2 = \frac{1}{2} E a \epsilon^2 dx \quad (1078)$$

gdzie  $\epsilon$  oznacza wydłużenie jednostkowe styczne do równoleżnika. Dla danego przekroju  $\epsilon$  otrzymujemy ze wzoru:



Rys. 467.

$$\varepsilon = \frac{2\pi(R+w) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{w}{R} \quad (1079)$$

w którym  $R$  oznacza teoretyczny promień zbiornika, a  $w$  ugięcie ściany w kierunku osi  $w$  do środka.

Zależność między  $M_x$  a  $w$  przy zmiennem  $J_z$  otrzymujemy ze wzoru:

$$EJ_z \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_x \quad (1080)$$

Wzór dla energii sprężystej wycinka o szerokości  $b = 1$  będzie następujący:

$$V = \int_0^H \frac{1}{2} EJ_z \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^H \frac{1}{2} Emx \frac{w^2}{R^2} dx \quad (1081)$$

Praca sił zewnętrznych, działających na ściany zbiornika, po pominięciu ich ciężaru własnego, składa się tylko z pracy parcia cieczy, równa się więc (dla  $b = 1$ ):

$$T = \int w \gamma x dx \quad (1082)$$

gdzie  $\gamma$  jest to ciężar jednostkowy cieczy.

W związku z powyższymi wzorami funkcja  $U = V - T$  przybiera tu postać następującą:

$$U = \int_0^H \frac{1}{2} EJ_z \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^H \frac{1}{2} Emx \frac{w^2}{R^2} dx - \int_0^H \gamma x w dx \quad (1082')$$

Równanie osi odkształconej bierzemy w postaci następującej:

$$w = \left( \frac{x}{H} - 1 \right)^2 (A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \dots) \quad (1083)$$

Przy  $x = H$ , zarówno  $w = 0$ , jak i  $\frac{dw}{dx} = 0$ , czyli że warunki brzegowe są spełnione.

Dla pierwszego przybliżenia zakładamy, że  $A_2 = A_3 = \dots = 0$ , czyli że

$$w = A_1 \left( \frac{x}{H} - 1 \right)^2 \quad (1084)$$

Wobec tego mamy, że

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2 A_1}{H} \left( \frac{x}{H} - 1 \right) \quad (1085)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2 A_1}{H^2} \quad (1086)$$

Prócz tego mamy, że  $J_z = \frac{m^3 x^3}{12(1 - \mu^2)}$ , a więc wzór dla  $U$  przybiera ostatecznie postać następującą:

$$U = \int_0^H \frac{1}{2} E \frac{m^3 x^3}{12(1 - \mu^2)} \cdot \frac{4 A_1^2}{H^4} dx + \int_0^H \frac{1}{2} E m x A_1^2 \left( \frac{x}{H} - 1 \right)^4 \cdot \frac{1}{R^2} dx - \\ - \int_0^H \gamma x A_1 \left( \frac{x}{H} - 1 \right)^2 dx \quad (1087)$$

lub

$$U = \frac{A_1^2 m^3 E}{24(1 - \mu^2)} + \frac{A_1^2 m E H^2}{60 R^2} - \frac{A_1 \gamma H^2}{12} \quad (1088)$$

Ustawiamy równanie  $\frac{\partial U}{\partial A_1} = 0$ , z którego wyznaczamy  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{\gamma H^2}{\frac{m^3 E}{1 - \mu^2} + \frac{0,4 m E H^2}{R^2}} \quad (1089)$$

Zwiększając liczbę wyrazów we wzorze (1083), otrzymujemy coraz ściślejsze wzory dla odkształconej. Rezultaty drugiego i trzeciego przybliżenia różnią się już od siebie przeważnie mniej, niż o 1%, co wskazuje na możliwość ograniczenia się do dwóch tylko przybliżeń. Pierwsze przybliżenie daje w porównaniu z drugim różnicę wynoszącą kilkanaście %.

Naprężenia równoleżnikowe otrzymujemy ze wzoru:

$$\sigma' = E \varepsilon = E \cdot \frac{w}{R} = \frac{E A_1}{R} \quad (1090)$$

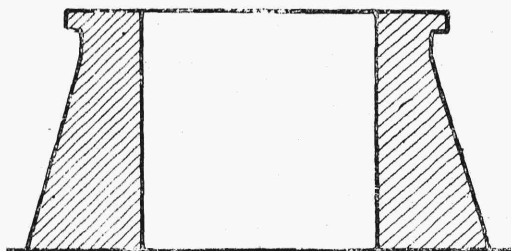
a naprężenia południkowe (dla pierwszego przybliżenia) ze wzoru:

$$\sigma'' = \frac{M_x z}{J_z} = E J_z \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{z}{J_z} = \frac{2 A_1 z E}{H^2} \quad (1091)$$

gdzie  $M_x$  wyznaczamy ze wzoru (1080) a gdzie  $z$  oznacza odległość krawędzi ściany od środka ciężkości przekroju poziomego danego odcinka ściany.

W razie prostokątnego przekroju ściany, przyjmujemy dla  $w$  wzór następujący:

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 \quad (1092)$$



Rys. 469.

Niektóre zbiorniki posiadają u góry mocne pierścienie (rys. 469), które przeszkadzają przesuwaniu się górnych części ściany. W takich wypadkach należy uważać, że wycinki południkowe, któreśmy dotąd uważali za utwierdzone w jednym końcu, są o ten pierścień podparte.

## 6. Kopuły cienkościenne o kształcie ciał obrotowych.

Obliczenie statyczne kopuł, przy uwzględnieniu wszystkich warunków ich pracy, natrafia na poważne trudności matematyczne, wobec czego w obliczeniach przeznaczonych dla celów technicznych zmuszeni jesteśmy najczęściej uciekać się do różnych uproszczeń, zależnych od rodzaju budowli, kształtu kopuły i jej obciążenia.

A więc, w razie kopuły cienkościennej np. żelaznej, możemy niekiedy przyjąć, że naprężenia normalne rozkładają się na całej grubości kopuły w sposób równomierny i że kopuła jest na obwodzie swobodnie podparta.

Gdy mamy do czynienia z kopułą, której grubość jest znaczna w stosunku do promieni krzywiny, a która jest wykonana z materiału o własnościach sprężystych mniej zbadanych, np. z muru ceglanego, stosujemy najczęściej metodę równowagi granicznej (vid. § 8, niniejszego rozdz.).