

ROZDZIAŁ XX.

Układy przestrzenne pełne.

Zadania, jakie budownictwo wysuwa do rozwiązania mechanice budowli, są wprawdzie przeważnie zadaniami przestrzennymi, mogą jednak zwykle być rozwiązywane po przyjęciu pewnych założeń upraszczających, jako zadania płaskie, na podstawie trzech równań równowagi:

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \text{ i } \quad \Sigma M = 0 \quad (955)$$

W pewnych wypadkach traktowanie zadań budownictwa, jako płaskich, przestaje być jednak możliwe i musimy się wtedy naogół uciekać do rozwiązywania 6 równań równowagi w przestrzeni:

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma Z = 0 \quad \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (955')$$

Robimy to w niniejszym rozdziale. Dotyczy to płyt, zbiorników i t.d.

I. Ogólna teoria płyt.

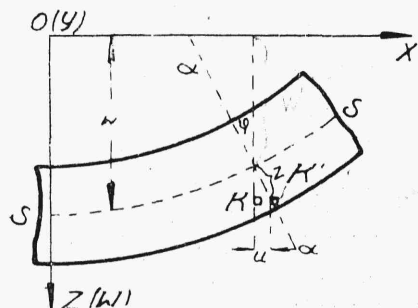
O ile na płytę działają siły, nachylone do jej płaszczyzny środkowej, wówczas mamy do czynienia z zagadnieniem przestrzennym¹⁾.

Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia opieramy się, po pierwsze, na założeniu, że grubość płyty jest mała w porównaniu do jej innych wymiarów a ugięcia małe w stosunku do grubości, po wtóre, na założeniu, że normale do powierzchni środkowej płyty pozostają normalami również i po wygięciu się płyty i, po trzecie, na założeniu, że powierzchnia środkowa płyty nie doznaje żadnych wydłużeń.

Pierwsze i trzecie z wymienionych założeń odpowiada analogicznemu założeniu w teorii belek (por. rozdz. VII, 1), drugie zaś odpowiada założeniu płaskich przekrojów (rozdz. I, 5).

¹⁾ Zagadnieniu płyt w literaturze polskiej poświęcone jest dzieło prof. dr. inż. M. T. Hubera p. t. „Teoria płyt“, 1921.

Na rys. 451 przedstawiony jest przekrój pionowy wycinka wygiętej płyty o jednostajnej grubości, niezależnie od kształtu płyty i sposobów jej podparcia. Podczas wyginania się płyty pewien punkt K oddalony o z od powierzchni środkowej przesunie się, przypuśćmy, w ten sposób, iż zajmie nowe położenie K' .



Rys. 451.

Składową u przesunięcia punktu K' równoległą do osi OX otrzymujemy ze wzoru:

$$u = -z \cdot \operatorname{tg} \varphi = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad (956)$$

gdzie w oznacza pionowe t. j. równoległe do osi OZ przesunięcia punktów powierzchni środkowej płyty i jest pewną funkcją współrzędnych x i y :

$$w = f(x, y) \quad (957)$$

i gdzie φ jest kątem nachylenia względem płaszczyzny pionowej normali $\alpha\alpha$ płyty. Odpowiednio, dla przesunięcia v , równoległego do osi OY , otrzymujemy:

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (958)$$

Przechodząc do zależności między wydłużeniami a naprężeniami, wyłączamy z płyty prostopadłościan o nieskończenie małych wymiarach dx, dy, dz . Na prostopadłościan ten działa 18 sił, odpowiadających 18 rodzajom naprężeń, przyczem jednak naprężenia styczne, zbiegające się na tych samych krawędziach, są sobie równe dla powodów analogicznych do podanych w rozdziale VIII, 1 (rys. 452).

W ten sposób liczba niewiadomych naprężeń sprowadza się do 12, przyczem naprężenia, działające na przeciwległe boki prostopadłościanu, różnią się od siebie o wielkości nieskończenie małe. Rzutując naprężenia, działające na prostopadłościan, na trzy osie współrzędnych w sposób analogiczny do odpowiedniego zadania płaskiego (rozdz. VIII, 1), dochodzimy do trzech równań następujących (rys. 452):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0 \quad (959)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0 \quad (960)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = 0 \quad (961)$$

$$dv = v + dv - v = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \quad (965)$$

Ponieważ obliczone w ten sposób przyrosty muszą się równać wydłużeniom odpowiednich krawędzi prostopadłościanu, więc mamy, że

$$du = \Delta dx = \varepsilon_x \cdot dx = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \quad (966)$$

$$dv = \Delta dy = \varepsilon_y \cdot dy = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy \quad (967)$$

skąd jednostkowe wydłużenia ε_x i ε_y będą się równały:

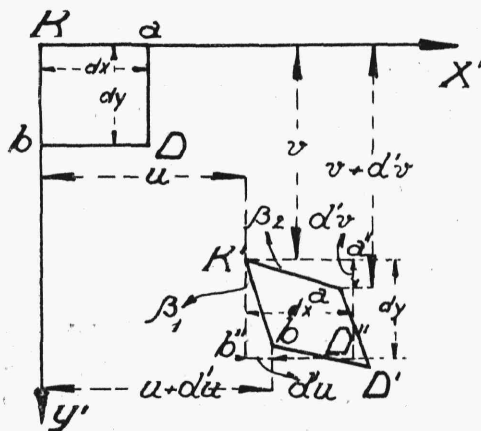
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (968)$$

Obliczamy w dalszym ciągu kąty jednostkowych przesunięć β_1 i β_2 (rys. 455). Przesunięcia krawędzi a i b prostopadłościanu w kierunku osi OY i OX wynoszą $v + d'v$ oraz $u + d'u$. W danym wypadku przyrosty

przesunięć krawędzi a i b względem przesunięcia krawędzi K wywołane są jedynie obrotem ścian Ka i Kb względem K , wobec czego przy obliczeniu tych przyrostów musimy uważać u , jako funkcję samego tylko y a v , jako funkcję samego tylko x (rys. 455). Będziemy wówczas mieli, że:

$$d'u = u + d'u - u = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \quad (969)$$

$$d'v = v + d'v - v = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \quad (970)$$



Rys. 455.

skąd wobec tego, że $d'u = \beta_1 dy$, a $d'v = \beta_2 dx$, mamy:

$$\beta_1 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{i} \quad \beta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (971)$$

Całkowite jednostkowe przesunięcie będzie się tu równało:

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (972)$$

W związku ze wzorami (956) i (958) przekształcamy wzory (968) i (972) w następujące:

$$\varepsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (973)$$

$$\varepsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (974)$$

$$\beta = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (975)$$

Na podstawie wzorów (962) i (963) wzory dla naprężeń normalnych przybierają następującą postać:

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (976)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\mu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (977)$$

Dla naprężenia stycznego τ_z otrzymujemy bezpośrednio:

$$\tau_z = G\beta = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad (978)$$

Przy korzystaniu z powyższych wzorów dla naprężeń natrafiamy tu na trudność, wynikającą z ustalenia liczby Poisson'a μ dla takich materiałów, jak beton i kamienie, dla których wahania tej wielkości w zależności od naprężeń (a również i od wieku betonu) są bardzo znaczne (vid. rozdz. V,2), tak iż np. dla betonu może ona spaść do $\mu = 0,125$, dla granitu do $\mu = 0,20$ i t.p. Najczęściej w obliczeniach płyt stosujemy $\mu = \infty 0,30$, przyczem sprawdzenie naprężeń wykonywamy według wzorów rozdz. IX, 6.

Obliczenie energii sprężystej, nagromadzonej w nieskończenie małym prostopadłościanie, prowadzimy również w założeniu, że $\tau_x = \tau_y = 0$ i $\sigma_z = 0$. Dla energii jednostkowej w podobnym wypadku bierzemy odpowiedni wzór z rozdz. XVI,1; przybiera on dla płyty kształt następujący:

$$V' = \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \mu \sigma_x \sigma_y \right) + \frac{\tau_z^2}{2G} \quad (979)$$

Po wstawieniu tu, zamiast σ_x , σ_y i τ_{xy} , ich wartości ze wzorów (976), (977), (978) i po dokonaniu odpowiedniej redukcji, otrzymujemy:

$$V' = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{z^2}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (980)$$

Aby wyznaczyć energię sprężystą, zawartą w całej płycie, mnożymy obie części wzoru (980) przez dx , dy , dz i całkujemy, przyczem całkowanie względem z wykonywamy w granicach grubości płyty, czyli od $-\frac{h}{2}$ do $\frac{h}{2}$:

$$V = \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{h^3}{24} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (981)$$

Wyprowadzenie dla odkształconej środkowej powierzchni płyty ogólnego wzoru różniczkowego, odpowiadającego równaniom

$$EJy'' = M \quad \text{lub} \quad EJy'' = q$$

z teorii belek (por. rozdz. VII,5), opiera się na równaniach równowagi sprężystej (959) — (961). Wstawiając w dwa pierwsze z nich wartości σ_x , σ_y i τ_{xy} ze wzorów (976) — (978), otrzymujemy, że:

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z} = \frac{E}{1 - \mu^2} z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (982)$$

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial z} = \frac{E}{1 - \mu^2} z \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (983)$$

a po zcałkowaniu względem z , że:

$$\tau_y = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + C_1 \quad (984)$$

$$\tau_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) + C_2 \quad (985)$$

Stałe całkowania otrzymujemy tu z warunku, że przy $z = \pm \frac{h}{2}$ $\tau_x = \tau_y = 0$, poczem wzory (984) i (985) przybierają następującą postać:

$$\tau_y = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (986)$$

$$\tau_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (987)$$

Wynika stąd, iż na grubości płyty naprężenia styczne zmieniają się według prawa paraboli.

Naprężenie σ_z uważamy za funkcję samego tylko z , gdyż niema powodu przypuszczać, aby dla różnych punktów powierzchni płyty naprężenia te miały rozchodzić się wgłąb płyty według różnych reguł.

W dalszym ciągu dokonywamy całkowania równania (961):

$$\int \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) dz = - \int \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz + C \quad (988)$$

Całkujemy, mianowicie, w granicach od $-\frac{h}{2}$ do $\frac{h}{2}$ i w ten sposób otrzymujemy, że:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = q \quad (989)$$

gdzie q oznacza obciążenie jednostkowe płyty; na powierzchni płyty $\sigma_z = q$.

Po wstawieniu tu wartości τ_x i τ_y z równań (986) i (987) i po wykonaniu całkowania w granicach $z = \pm \frac{h}{2}$ otrzymujemy ostatecznie następujące równanie odkształconej powierzchni środkowej płyty:

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (990)$$

Wstawiając naprężenia τ_x i τ_y we wzór (961), bezpośrednio otrzymujemy:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \quad (991)$$

lub, biorąc pod uwagę równanie (990), mamy, że

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{6q}{h^3} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (992)$$

skąd, drogą całkowania, dochodzimy do następującego wzoru dla naprężenia σ_z , jako funkcji z :

$$\sigma_z = - \frac{6q}{h^3} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{h^2 z}{4} \right) - \frac{q}{2} \quad (993)$$

2. Płyty eliptyczne i koliste.

Płyty eliptyczne i koliste występują w budownictwie, jako dna cylindrycznych zbiorników, jako podłogi lub fundamenty cylindrycznych wież i t.d., wreszcie, jako pokrywy różnego rodzaju włazów. We wszystkich tych wypadkach uważać można obciążenie płyty za ciągłe i równomierne. Co się tyczy sposobu podparcia, to przeważnie płyty te są utwierdzone wzdłuż całego obwodu, z wyjątkiem fundamentów i włazów, które uważamy za swobodnie podparte. Jednak i w tym ostatnim wypadku możemy stosować schemat płyty utwierdzonej, gdyż przy obliczeniu płyt chodzi najczęściej o wyznaczenie nie ugięcia, lecz największych naprężeń, które nie są w płycie utwierdzonej mniejsze, niż w podparciej, zastosowanie więc wymienionego schematu nie zmniejsza tu naogół stopnia bezpieczeństwa płyty.

Obliczenie płyty eliptycznej (a więc w szczególnym wypadku i kolistej), obciążonej w sposób ciągły i równomierny i utwierdzonej wzdłuż obwodu, daje się skutecznie bezpośrednio zapomocą równania różniczkowego płyty:

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$