

przesuwne. Zastąpienie jednej z podpór linjowo-przesuwnych przez podporę wielokierunkowo-przesuwą powoduje zmienność układu.

Zauważyć należy, że w jednym szczególnym wypadku nawet podpory linjowo-przesuwne nie zapewniają pierścieniowi niezmienności. Jest to, mianowicie, wypadek wieloboku foremnego o liczbie boków parzystej i o kierunku przesuwania podpór, pokrywającym się z kierunkiem dwusiecznych kątów wewnętrznych wieloboku (rys. 490). O ile chociaż jedna podpora w tym wypadku przesuwą się nie wzdłuż dwusiecznej (np. podpora *A*), układ staje się niezmiennym.

W wypadku, gdy dopiero podpory zabezpieczają kratownicy przestrzennej niezmiennosc, wzór (1138) należy zastąpić przez wzór

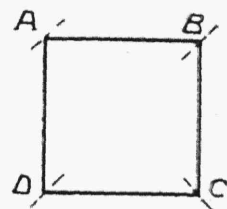
$$r = 3k - n \quad (1141)$$

w którym *n* oznacza liczbę składowych reakcyj podpór.

Wzór ten otrzymamy z równania:

$$r = 3k - 6$$

gdy od obydwóch jego części odejmiemy tę samą liczbę jednostek, t. j. gdy liczbę składowych reakcyj podpór powiększymy o tę samą liczbę jednostek, o jaką zmniejszyliśmy liczbę prętów kratownicy.



Rys. 490.

2. Ogólne sposoby wyznaczania sił w prętach kratownic przestrzennych,

Do obliczenia kratownic przestrzennych mogą być naogół użyte te same metody, które są stosowane do obliczenia sił w prętach kratownic płaskich (rozdz. XIV). Pozatem do obliczenia niektórych rodzajów kratownic mogą być stosowane pewne specjalne rodzaje obliczenia, omówione w paragrafach następnych (§§ 3, 4, 5).

Wobec tego, że kratownice przestrzenne stają się przeważnie geometrycznie niezmiennymi dopiero po należytem rozmieszczeniu ich podpór, wyznaczenie reakcyj odbywa się tu zwykle jednocześnie z wyznaczeniem sił w prętach kratownicy. Jeden z nielicznych wyjątków stanowi np. kratownica, przedstawiona na rvs. 486, której reakcje mogą być wyznaczone, niezależnie od sił w prętach kratownicy, na podstawie sześciu równań równowagi, zastosowanych do kratownicy przestrzennej, jako do bryły sztywnej.

Przed przystąpieniem do obliczenia kratownicy przestrzennej powinniśmy przedewszystkiem ustalić, w których prętach siły podłużne są równe zeru. Do tego służą nam wskazówki następujące:

1^o. Jeżeli w węźle, w którym nie działa żadna siła zewnętrzna, zbiega się pewna liczba prętów, leżących w tej samej płaszczyźnie, oraz jeden pręt, nie leżący w tej płaszczyźnie, wówczas siła w tym ostatnim równa się zeru. Pochodzi to stąd, że dla równowagi węzła wypadkowa sił prętów, leżących w danej płaszczyźnie, musi znieść się z siłą pręta, nie leżącego w tej płaszczyźnie, zaś dwie te siły, nie działając wzdłuż jednej i tej samej prostej, znoszą się tylko w tym wypadku, gdy każda z nich zosobna równa się zeru.

2^o. Jeżeli w węźle, w którym nie działa żadna siła zewnętrzna, zbiegają się tylko dwa pręty, to siły podłużne w nich obu równe są zeru, co ma zresztą miejsce i w kratownicach płaskich (por. rozdz. XIV,2).

3^o. Jeżeli w węźle, w którym nie działa żadna siła zewnętrzna, zbiegają się tylko trzy pręty, nie leżące w jednej i tej samej płaszczyźnie, to siły we wszystkich trzech prętach równe są zeru. Jest to wynikiem uwag z pod 1^o i 2^o.

Z pośród sposobów ogólnych obliczenia kratownic przestrzennych analityczna metoda zrównoważenia węzłów może być stosowana bez żadnych ograniczeń. W tym celu należy dla każdego węzła kratownicy ustawić trzy równania równowagi:

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum Z = 0.$$

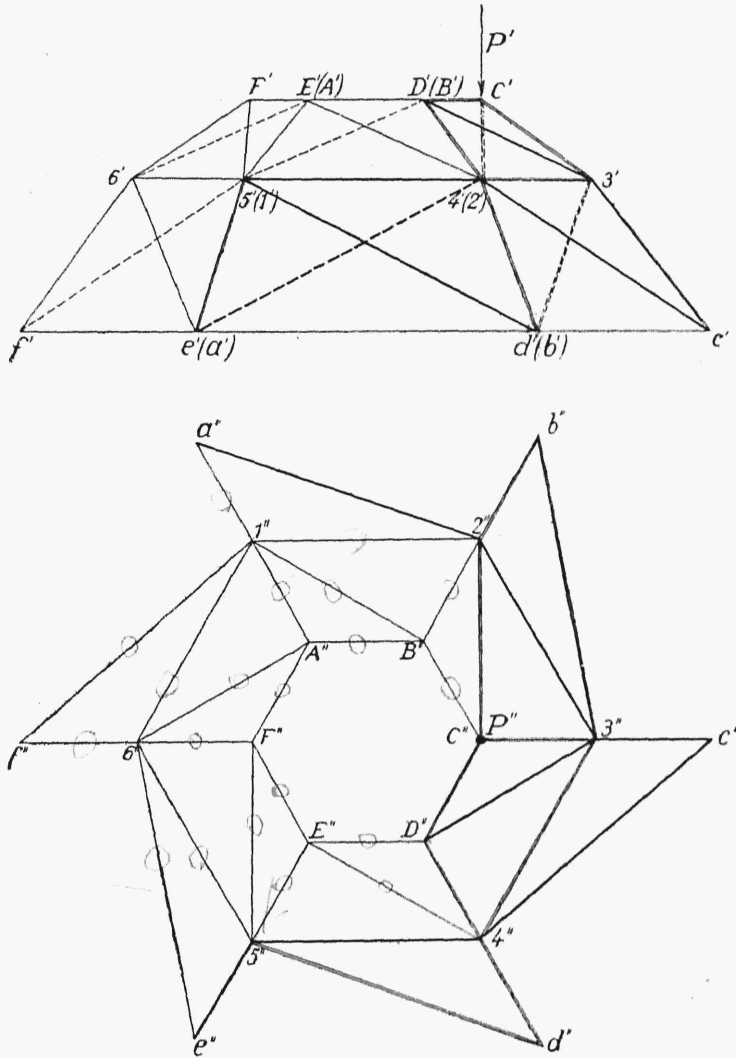
Naogół liczbie $3k$ równań odpowiada tu liczba $3k$ niewiadomych mianowicie, $3k - n$ niewiadomych sił oraz n niewiadomych reakcyj.

Metoda kinematyczna i metoda momentów (Ritter'a) mogą również znaleźć zastosowanie w obliczeniu kratownic przestrzennych, jednak nie są tu przeważnie dogodne w użyciu.

Aby można było zastosować do obliczenia kratownic metodę wykreślnego zrównoważenia węzłów, trzeba, aby w żadnym węźle kratownicy nie zbiegało się więcej ponad 3 pręty o siłach niewiadomych. Kratownicę, w której żaden węzeł nie odpowiada temu warunkowi, należy obliczać metodą wymiany prętów (Henneberg'a), omówioną w rozdz. XIV,2, która w danym wypadku również sprowadza się właściwie do znajdowania sił w prętach kratownicy sposobem wykreślnego zrównoważenia węzłów.

Stosowanie sposobu wykreślnego zrównoważenia węzłów do obliczenia układów przestrzennych polega na zamykaniu wieloboków sił w dwóch płaszczyznach rzutów, czyli na wykonywaniu konstrukcyj geometrycznych, omówionych w rozdz. II,2. Podajemy tu przykład zastosowania tej metody do obliczenia kopuły kratowej obciążonej jedną siłą skupioną.

Bierzemy kratownicę przestrzenną przedstawioną na rys. 491, obciążoną jedną siłą P (zaczepioną w węźle O) i wspartą na sześciu podporach przegubowych, lecz nieprzesuwnych. Kratownica ta jest statycznie wyzna-



Rys. 491.

czalna, gdyż w danym wypadku ma miejsce zależność wyrażona wzorem (1141). Rzeczywiście, ponieważ tu liczba prętów $r = 36$, liczba węzłów $k = 18$ i liczba składowych reakcyj $n = 18$, więc mamy, że

$$36 = 3 \cdot 18 - 18$$

Przedewszystkiem ustalić musimy, w których prętach kratownicy nie powstają pod działaniem siły zewnętrznej P żadne siły podłużne.

Rozważanie nasze rozpoczynamy od nieobciążonych węzłów górnego pierścienia kratownicy. Ponieważ w węźle E zbiegają się cztery pręty, z których trzy, mianowicie, pręty $E - 4$, $E - 5$ i $E - D$ leżą w jednej płaszczyźnie, więc w czwartym pręcie $E - F$ siła podłużna, w myśl powiedzianego wyżej, będzie się równała zeru. Dla podobnych powodów zeru będą równe siły podłużne w prętach $F - A$, $A - B$, $B - C$ i $E - D$. Skoro z pośród zbiegających się w węźle E prętów dwa ($E - F$ i $E - D$) mają siły podłużne równe zeru, to również i siły w dwóch pozostałych prętach ($E - 5$ i $E - 4$) węzła muszą być równe zeru, gdyż tylko wtedy wypadkowa sił w tych prętach równać się może zeru i węzeł E może pozostać w równowadze. Z tej samej racji zeru będą równe siły podłużne w następujących prętach: $F - 6$, $F - 5$, $A - 1$, $A - 6$, $B - 2$, $B - 1$.

W pręcie $6 - 5$ siła podłużna równa jest zeru z tego względu, że w węźle 5 zbiegają się tylko cztery pręty o siłach podłużnych różnych od zera i trzy z nich (pręty $5 - e$, $5 - d$ i $5 - 4$) leżą w jednej płaszczyźnie.

W podobnych warunkach znajdują się również pręty $6 - 1$ i $1 - 2$, w których więc siły podłużne są również równe zeru.

W węźle 6 zbiegają się pręty $6 - 1$, $F - 6$, $6 - 5$ i $A - 6$, w których siły podłużne są równe zeru, skąd wynika, że również zeru muszą być równe siły w prętach $6 - f$ i $6 - e$, gdyż tylko tą drogą wypadkowa sił, działających w tych prętach, może stać się równą zeru. W podobny sposób można uzasadnić, że zeru będą równe siły podłużne w prętach $1 - f$ i $1 - a$.

Pręty o siłach podłużnych równych zeru przedstawione zostały na rys. 491 zapomocą cienkich linii pojedynczych.

Siły podłużne w pozostałych węzłach kratownicy przestrzennej znajdujemy z warunków równowagi poszczególnych węzłów.

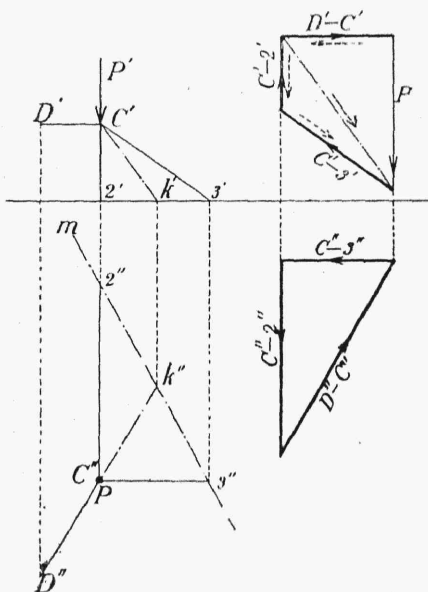
Zaczynamy od węzła C . Na rys. 492 przedstawiamy ten węzeł wraz ze zbiegającymi się w nim prętami w rzutach na dwie płaszczyzny do siebie prostopadłe i zamykamy dwa wieloboki sił, odpowiadające rzutom siły P i sił w prętach $C - D$, $C - 2$ i $C - 3$.

Postępujemy tu w myśl reguł podanych w rozdz. II, 2 (rys. 24). Przeprowadzamy więc płaszczyznę pionową, przechodzącą przez kierunek siły P i kierunek pręta $C - D$ (ślad $D - k$), oraz płaszczyznę, przechodzącą przez kierunki $C - 2$ i $C - 3$ (ślad mn), i znajdujemy linię $C - k$ przecięcia się wspomnianych płaszczyzn. Rozkładamy siłę P na kierunki $C - D$ i $C - k$, zaś siłę, odpowiadającą kierunkowi $C - k$ na kierunki $C - 2$ i $C - 3$. Strzałki sił $D - C$ i $C - k$ otrzymują narazie kierunki przeciwne do kierunku siły P , a strzałki w prętach $C - 2$ i $C - 3$, przeciwne do strzałki siły $C - k$ (strzałki punktowane).

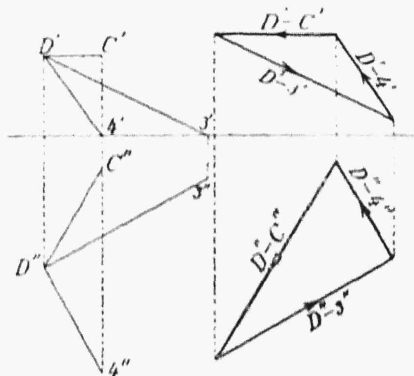
Reakcje powyższych prętów na węzeł C będą miały kierunki przeciwne do poprzednio omówionych. Odwracamy więc strzałki, poczem wieloboki, odpowiadające obydwom płaszczyznom rzutów, będą miały strzałki zwrócone w jedną stronę (strzałki pełne).

Z wieloboków tych wynika, że siły podłużne we wszystkich prętach, zbiegających się w węźle C (z wyjątkiem pręta $C-B$, w którym siła równa jest zeru), są skierowane do węzła, są więc siłami ściskającymi (rozdz. II,6).

Przechodzimy z kolei do węzła D (rys. 493), w którym zbiegają się dwa pręty ($D-4$ i $D-3$) o nieznanach siłach podłużnych i jeden ($D-C$) o sile podłużnej, otrzymanej z warunków równowagi węzła C . Zrównoważenie węzła D wykonywamy w dwóch płaszczyznach rzutów, pomimo iż jest to zadanie płaskie, gdyż przy rozważaniu warunków równowagi dalszych węzłów będziemy musieli korzystać znowu z rzutów sił na dwie płaszczyzny. Ponieważ pręt $D-C$ jest ściskany, więc siła działa tu w kierunku do



Rys. 492.



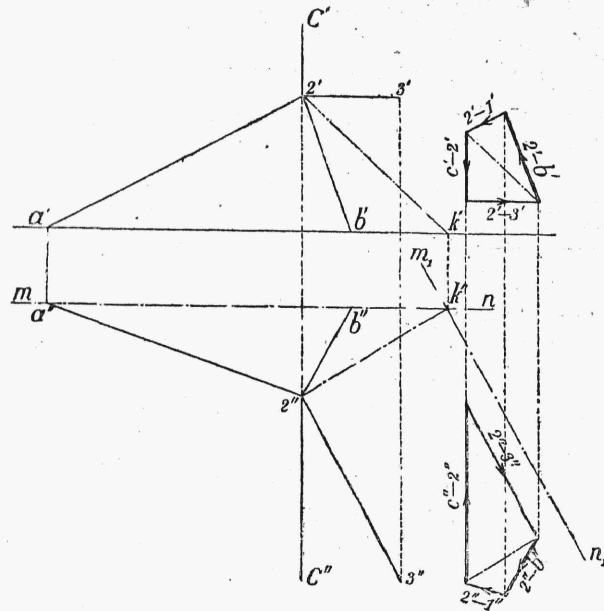
Rys. 493.

węzła D . Z odpowiednich trójkątów wynikać będzie, że pręt $D-3$ jest wyciągany, zaś pręt $D-4$ ściskany.

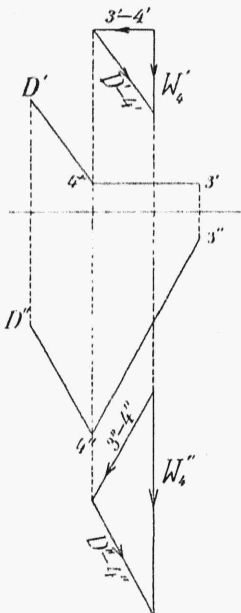
Z pośród prętów zbiegających się w węźle 2 (rys. 494) siła w pręcie $C-2$ jest nam znana z warunków równowagi węzła C , zaś siły w prętach $2-a$, $2-b$ i $2-3$ nie są znane. W tym wypadku dla zrównoważenia węzła 2 przeprowadzamy (rys. 494) płaszczyzny przez pręty $C-2$ i $2-3$ (ślad m_1n_1) oraz przez pręty $2-a$ i $2-b$ (ślad mn). W dalszym ciągu wykonywamy konstrukcję geometryczną analogiczną do przedstawionej na rys. 492.

Przed rozważaniem warunków równowagi węzła 4 musimy znaleźć wypadkową reakcyj na ten węzeł prętów $D-4$ oraz $4-3$, które są skierowane

rowane do węzła 4. Wypadkowa ta (siła W_4) jest obliczona na rys. 495



Rys. 494.



Rys. 495.

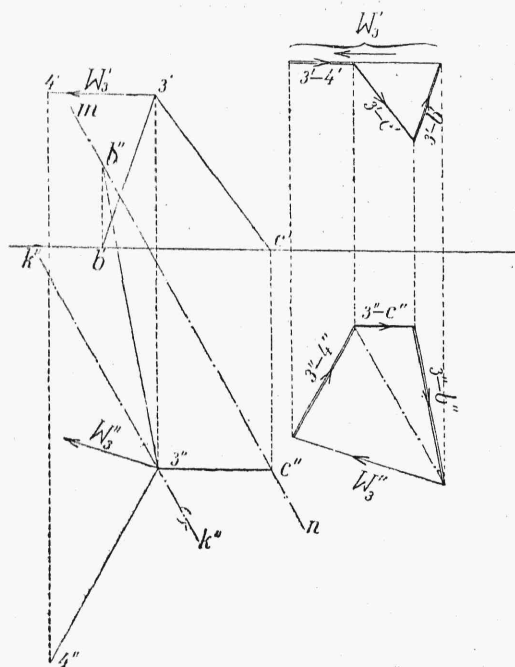
W dalszym ciągu rozpatrujemy siłę W_4 jako zewnętrzną siłę zaczepioną w węźle 4. Dla obliczenia sił w prętach, zbiegających się w tym węźle, przeprowadzamy (rys. 496) jedną płaszczyznę przez pręty 4 — 5 i 4 — a (ślad mn), drugą zaś przez pręt 4 — c i kierunek siły W_4 (ślad m_1n_1), poczem postępujemy w ten sam sposób, jak przy obliczeniu sił w prętach zbiegających się w węźle C lub 2.

Dalej znajdujemy wypadkową W_3 sił zbiegających się w węźle 3 (rys. 497). Wreszcie obliczamy siły w prętach zbiegających się w węzłach 3 (rys. 498) i 5 (rys. 499).

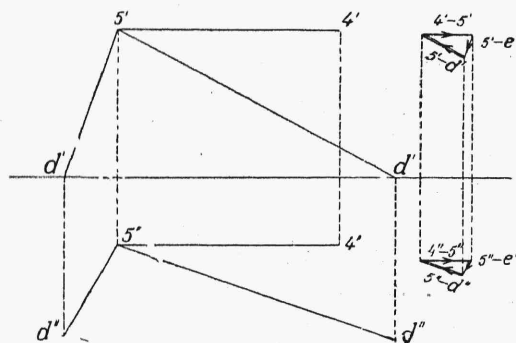
Na rys. 491 i na poszczególnych wielobokach sił pręty ściskane oznaczone są liniami podwójnymi, pręty wciągane grubymi linjami pojedynczymi, a pręty o siłach równych zero cienkimi linjami pojedynczymi.

Obliczenie statycznie niewyznaczalnych kratownic przestrzennych najdogodniej wykonać jest metodą Maxwell'a i Mohr'a, omówioną w rozdz.

XIV,6. Ta sama metoda może być również z pożytkiem zastosowana i do



Rys. 498.



Rys. 499.

obliczenia przesunąć poszczególnych węzłów kratownic przestrzennych i kątów obrotu ich prętów.

Metody omówione w rozdz. XVI mogą też znaleźć tu zastosowanie.