

Układy przestrzenne kratowe.

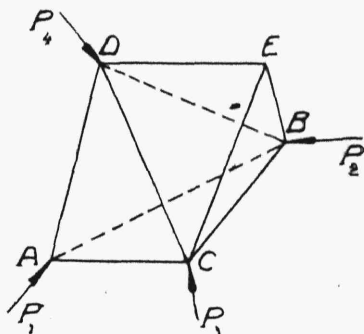
I. Zależności między liczbą boków, węzłów i podpór.

Przestrzenną nazywamy kratownicę, której nie wszystkie pręty znajdują się w jednej i tej samej płaszczyźnie.

Kratownice przestrzenne rozpatrujemy naogół, jako przegubowe, przy czym w węzłach wyobrażamy sobie przeguby kuliste, pozwalające na swobodny obrót schodzących się w nich prętów we wszystkich kierunkach.

Najprostszy sposób powstawania kratownic przestrzennych geometrycznie niezmiennych jest następujący:

Bierzemy trójkąt przegubowy ABC (rys. 484) i łączymy z nim węzeł D , nie leżący w płaszczyźnie trójkąta, zapomocą prętów AD, BD, CD . Otrzymujemy tą drogą układ przestrzenny geometrycznie niezmienny, który będzie też układem statycznie wyznaczalnym, gdyż siły P , zaczepione w jego węzłach, a równoważące się ze sobą, wywołują w prętach siły, dające się wyznaczyć bezpośrednio z warunków równowagi węzłów. Do ostrosłupa $ABCD$ dołączamy zapomocą prętów DE, BE i CE węzeł E i dochodzimy w ten sposób do nowego układu $ADBCE$, który jest również geometrycznie niezmienny i statycznie wyznaczalny. W dalszym ciągu postępujemy tą samą drogą.



Rys. 484.

Oznaczamy przez s liczbę węzłów dołączonych do trójkąta ABC .

Liczba wszystkich prętów w kratownicy wynosi:

$$r = 3s + 3 \quad (1137)$$

Jeżeli oznaczyć przez k liczbę wszystkich węzłów w kratownicy, wówczas $s = k - 3$. Wstawiając tę wartość s we wzór (1137), otrzymujemy:

$$r = 3k - 9 + 3 = 3k - 6 \quad (1138)$$

Wzór ten odgrywa tu rolę wzoru (618) dla kratownic płaskich.

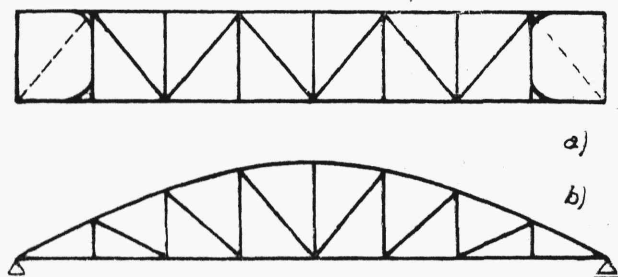
O ile $r < 3k - 6$, to kratownica staje się zmienną, o ile zaś $r > 3k - 6$, wówczas mamy do czynienia z prętami nadliczbowymi, czyli z kratownicą wewnętrznie statycznie niewyznaczalną.

W niektórych wypadkach niezmiennosc układu pozwala ustalić następujące twierdzenie Cochy'ego:

Kratownica przestrzenna, w której osie prętów tworzą krawędzie wielościanu zamkniętego o ścianach trójkątnych, jest układem niezmiennym.

Twierdzenie to oparte zostało na twierdzeniu geometrii, że liczba ścian wielościanu zamkniętego dodana do liczby jego wierzchołków, równa się, powiększonej o 2, liczbie krawędzi wielościanu. Twierdzenie to (t.zw. twierdzenie Euler'a) przybiera postać następującą:

$$m + k = r + 2 \quad (1139)$$



Rys. 485.

gdzie m oznacza liczbę ścian wielościanu. Ponieważ w naszym wypadku ściany są trójkątne, a każda krawędź należy do dwóch ścian, więc

$$r = \frac{3m}{2} \quad (1140)$$

wobec czego równanie (1139) przekształca się w równanie:

$$r = 3k - 6$$

czyli w równanie (1138), wskazujące na niezmiennosc układu.

Twierdzenie Cochy'ego uzasadnia np. niezmiennosc układów przestrzennych, jakimi są dźwigary mostowe łącznie z górnymi i dolnymi wiatrownicami. Dźwigar taki w widokach z boku (b) i z góry (a) przedstawiony jest na rys. 485.

Z twierdzenia Cochy'ego wynika, mianowicie, że w płaszczyznach słupów połączenia poprzeczne nie są naogół w dźwigarze potrzebne.

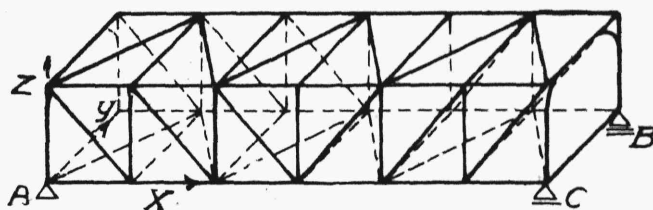
Kratownica przestrzenna geometrycznie niezmienna może być uważana, w myśl zasady zeszytnienia, za bryłę, której swobodę mamy ograniczyć zapomocą należytego ustalenia podpór.

Możemy tu mieć do czynienia, podobnie jak w kratownicach płaskich, z podporami przegubowymi i przegubowo-przesuwnymi.

Reakcja podpory przegubowej nieprzesuwnej może być rozłożona na składowe, równoległe do odpowiednich osi współrzędnych, wobec czego obliczenie jej wymaga wyznaczenia trzech niewiadomych.

Podpory przegubowo-przesuwnie mogą być dwóch rodzajów. Pierwszy rodzaj podpór może przesuwac się tylko wzdłuż określonej prostej (na rysunkach jedna kreska pod trójkątem); podpory te dają dwie niewiadome składowe reakcji, prostopadłe do tej prostej (podpory jednokierunkowo-przesuwnie albo linjowo-przesuwnie). Drugi rodzaj podpór przesuwnych może poruszać się po pewnej płaszczyźnie w dowolnym kierunku (na rysunku dwie kreski pod trójkątem), wskutek czego reakcje są prostopadłe do płaszczyzny możliwego przesunięcia (podpory wielokierunkowo-przesuwnie).

Kratownica przestrzenna posiada sześć stopni swobody; ażeby więc uczynić ją nieruchomą, musimy wprowadzić sześć ograniczeń jej ruchu. W układzie, przedstawionym na rys. 486 podpora przegubowa A pozbawia



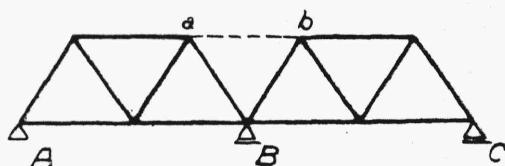
Rys. 486.

kratownicę możliwości ruchu postępowego w kierunku wszystkich trzech osi współrzędnych (3 ograniczenia ruchu), podpora linjowo-przesuwna C pozbawia kratownicę możliwości obrotu względem osi AY i AZ (2 ograniczenia ruchu), wreszcie podpora przesuwna B pozbawia kratownicę możliwości obrotu względem osi AX (1 ograniczenie ruchu). W ten sposób w danym razie trzy podpory A, B, C całkowicie wystarczają do unieruchomienia kratownicy.

Wymienione podpory możnaby zastąpić przez trzy podpory linjowo-przesuwne, gdyż w tym wypadku liczba ograniczeń ruchu pozostałaby równą 6. Dla kratownicy wewnętrznie niezmienniej nie istnieje, poza wymienionymi dwoma, innych sposobów podparcia, unieruchamiających układ i zabezpieczających mu statyczną wyznaczalność zewnętrzną.

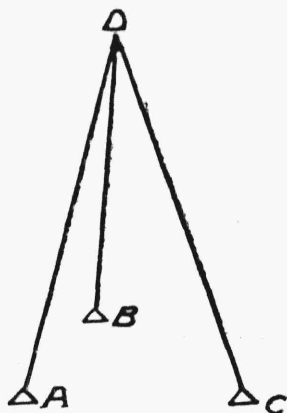
Kratownicom geometrycznie zmiennym możemy nadawać niezmiennność również i zapomocą odpowiedniego doboru podpór. Jest to możliwe w niektórych wypadkach i w układach płaskich, w układach zaś przestrzennych znajduje szerokie zastosowanie.

Przykładem tego rodzaju wypadku w płaszczyźnie może być kratownica przedstawiona na rys. 487. W kratownicy tej środkowa podpora B przywróciła układowi niezmiennność, której został pozbawiony przez wyrzucenie pręta ab .

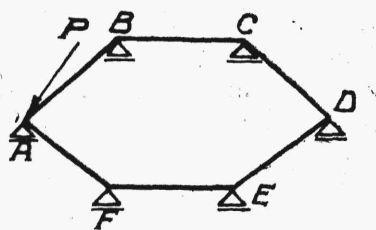


Rys. 487.

Typowym układem przestrzennym, w którym podpory zabezpieczają niezmiennność, jest trójnog przedstawiony na rys. 488. O ileby podpory A, B, C trójnogu były całkowicie przesuwne lub linjowo-przesuwne, układ byłby zmiennym wobec tego, że w punkcie D mamy przegub kulisty. Dopiero trzy podpory przegubowe, lecz nieprzesuwne zabezpieczają niezmiennność układu.



Rys. 488.



Rys. 489.

Innym przykładem tego rodzaju jest wielobok przegubowy $ABCDEF$, przedstawiony na rys. 489 (pierścień podporowy, por. § 5 tego rozdziału). Dla dowolnego układu sił zewnętrznych wymieniony wielobok będzie geometrycznie niezmienny, o ile tylko w węzłach mamy podpory linjowo-

przesuwne. Zastąpienie jednej z podpór linjowo-przesuwnych przez podporę wielokierunkowo-przesuwą powoduje zmienność układu.

Zauważyć należy, że w jednym szczególnym wypadku nawet podpory linjowo-przesuwne nie zapewniają pierścieniowi niezmienności. Jest to, mianowicie, wypadek wieloboku foremnego o liczbie boków parzystej i o kierunku przesuwania podpór, pokrywającym się z kierunkiem dwusiecznych kątów wewnętrznych wieloboku (rys. 490). O ile chociaż jedna podpora w tym wypadku przesuwą się nie wzdłuż dwusiecznej (np. podpora *A*), układ staje się niezmiennym.

W wypadku, gdy dopiero podpory zabezpieczają kratownicy przestrzennej niezmiennosc, wzór (1138) należy zastąpić przez wzór

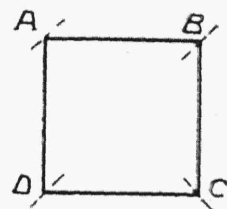
$$r = 3k - n \quad (1141)$$

w którym *n* oznacza liczbę składowych reakcyj podpór.

Wzór ten otrzymamy z równania:

$$r = 3k - 6$$

gdy od obydwóch jego części odejmiemy tę samą liczbę jednostek, t. j. gdy liczbę składowych reakcyj podpór powiększymy o tę samą liczbę jednostek, o jaką zmniejszyliśmy liczbę prętów kratownicy.



Rys. 490.

2. Ogólne sposoby wyznaczania sił w prętach kratownic przestrzennych,

Do obliczenia kratownic przestrzennych mogą być naogół użyte te same metody, które są stosowane do obliczenia sił w prętach kratownic płaskich (rozdz. XIV). Pozatem do obliczenia niektórych rodzajów kratownic mogą być stosowane pewne specjalne rodzaje obliczenia, omówione w paragrafach następnych (§§ 3, 4, 5).

Wobec tego, że kratownice przestrzenne stają się przeważnie geometrycznie niezmiennymi dopiero po należytem rozmieszczeniu ich podpór, wyznaczenie reakcyj odbywa się tu zwykle jednocześnie z wyznaczeniem sił w prętach kratownicy. Jeden z nielicznych wyjątków stanowi np. kratownica, przedstawiona na rvs. 486, której reakcje mogą być wyznaczone, niezależnie od sił w prętach kratownicy, na podstawie sześciu równań równowagi, zastosowanych do kratownicy przestrzennej, jako do bryły sztywnej.

Przed przystąpieniem do obliczenia kratownicy przestrzennej powinniśmy przedewszystkiem ustalić, w których prętach siły podłużne są równe zeru. Do tego służą nam wskazówki następujące: