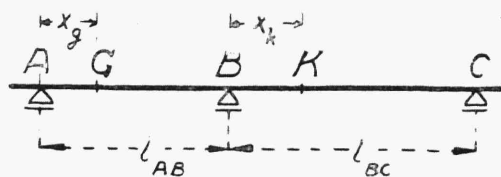


W tym ostatnim wypadku należy mieć na uwadze kąty podane we wzorach (333) i (394), które uzupełniają liczbę zależności, potrzebnych do wyznaczenia stałych całkowania.

5. Twierdzenie o dwóch momentach i ogniska belki ciągłej.¹⁾

Dalsze uproszczenia w obliczeniu belek ciągłych mogą być uzyskane na podstawie twierdzenia o dwóch momentach.



Rys. 222.

Bierzemy w dwóch sąsiednich przęsłach AB i BC belki ciągłej dwa punkty G i K (rys. 222) i wypisujemy wzory dla momentów zginających w tych punktach. Na podstawie wzoru (403) mamy:

$$M_G^{AB} = M_{oG}^{AB} + M_A \cdot \frac{l_{AB} - x_g}{l_{AB}} + M_B \cdot \frac{x_g}{l_{AB}} \quad (410)$$

$$M_K^{BC} = M_{oK}^{BC} + M_B \cdot \frac{l_{BC} - x_k}{l_{BC}} + M_C \cdot \frac{x_k}{l_{BC}} \quad (411)$$

Momenty podporowe M_A i M_C uważamy za niewiadome dwóch równań (410) i (411), z których je wyznaczamy. Otrzymane tą drogą wartości M_A i M_C wstawiamy w równanie trzech momentów:

$$\begin{aligned} M_A \cdot l_{AB} + 2M_B (l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = \\ = -6 (\mathfrak{S}_{AB} + \mathfrak{S}_{BC}) \end{aligned} \quad (412)$$

¹⁾ M. Lévy, op. cit., II, str. 302.

Otrzymujemy stąd:

$$\begin{aligned} & \frac{(M_G^{AB} - M_{oG}^{AB})l_{AB}^2}{l_{AB} - x_g} + \frac{(M_K^{BC} - M_{oK}^{BC})l_{BC}^2}{x_k} + \\ & + M_B \left[2(l_{AB} + l_{BC}) - \frac{x_g \cdot l_{AB}}{l_{AB} - x_g} - \frac{(l_{BC} - x_k)l_{BC}}{x_k} \right] = \\ & = -6(\mathfrak{B}_{AB} + \mathfrak{B}_{BC}) \end{aligned} \quad (413)$$

Dobieramy odcięte punktów G i K w ten sposób, aby współczynnik przy M_B w równaniu (413) równał się zeru. Wynika stąd, że przy:

$$2(l_{AB} + l_{BC}) - \frac{x_g l_{AB}}{l_{AB} - x_g} - \frac{(l_{BC} - x_k)l_{BC}}{x_k} = 0 \quad (414)$$

mamy:

$$\frac{(M_G^{AB} - M_{oG}^{AB})}{l_{AB} - x_g} + \frac{(M_K^{BC} - M_{oK}^{BC})}{x_k} = -6(\mathfrak{B}_{AB} + \mathfrak{B}_{BC}) \quad (415)$$

Z równań powyższych wynika:

Jeżeli w jednym z przęseł belki ciągłej weźmiemy dowolny punkt G , to w sąsiednim przęśle znajdzie się taki punkt K , w którym moment zginający będzie związany z momentem w punkcie G równaniem (415), podczas gdy położenie punktu K w zależności od położenia punktu G ustala równanie (414).

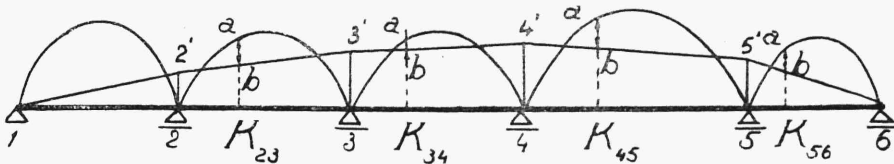
Jest to twierdzenie o dwóch momentach.

Twierdzenie o dwóch momentach ułatwia przedewszystkiem sporządzenie wykresu momentów zginających w belce ciągłej.

Przypuścmy, że końce belki ciągłej przedstawionej na rys. 223 są swobodnie podparte.

Wybieramy za punkt G pierwszego przęsła 12 punkt 1 na lewej podporze. Z równania (414) znajdujemy odcięta punktu K , dla którego moment zginający może być wyznaczony z równania (415). Przypuścmy, że moment ten w skali momentów równa się ab . Odkładamy odcinek ten wzdłuż pionu aK_{23} w ten sposób, aby punkt a leżał na krzy-

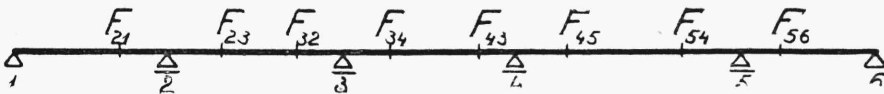
wej, ograniczającej wykres momentów od sił zewnętrznych w przęśle 23. Punkt b musi się wobec tego znajdować na prostej ograniczającej wykres momentów zginających, wywołanych przez momenty podporowe, gdyż rzędne wykresu momentów zginających belki ciągłej zawarte są między wymienioną prostą a krzywą. Rozumując w dalszym ciągu w sposób analogiczny do powyższego, znajdujemy w poszczególnych przęsłach szereg punktów K (ognisk, vid. nast. odcinek) i odpowiednich punktów b (rys. 223).



Rys. 223.

Doszedłszy tą drogą do ostatniego przęsła 56 belki, zauważamy, że w przęśle tym prosta, ograniczająca wykres momentów zginających, ma dwa punkty wiadome, mianowicie, punkt b i 6. Przeprowadzamy przez nie prostą i znajdujemy jej punkt przecięcia się z pionem nad podporą 5. Odcinek 55' da nam wartość momentu podporowego nad tą podporą. Przez punkt 5' i b przeprowadzamy prostą wykresu dla przęsła 45 i postępujemy w ten sam sposób dla całej belki, doprowadzając wykres do jej końca.

Opisany sposób postępowania jest dogodniejszy od sporządzania wykresu momentów zginających na podstawie momentów podporowych, obliczonych z twierdzenia o trzech momentach. Pochodzi to stąd, że podczas gdy w tamtym wypadku zmuszeni byliśmy do rozwiązywania $n - 2$ równań linjowych (gdzie n oznacza liczbę podpór) z trzema niewiadomymi każde, tutaj rozwiązujemy dla każdego przęsła po dwa równania z jedną niewiadomą.

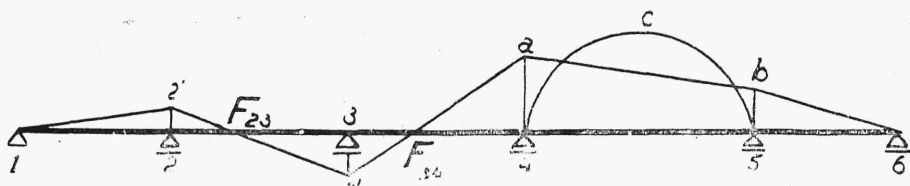


Rys. 224.

Bierzemy belkę ciągłą pozbawioną wszelkiego obciążenia (rys. 224). Stosujemy do tej belki twierdzenie o dwóch momentach, przyjmując przede wszystkim za punkt G lewą końcową podporę 1. Ponieważ momenty

M_G^{AB} , M_{oG}^{AB} , M_{oK}^{BC} równe są tu zeru, więc moment $M_K^{AB} = 0$. Punkt w przęśle 23 odpowiadający, według równania (414), punktowi 1 oznaczamy przez F_{23} i nazywamy lewym ogniskiem tego przęsła. Przyjmujemy w dalszym ciągu punkt F_{23} za punkt G i, rozumując w sposób podobny do poprzedniego, znajdujemy punkt F_{34} , odgrywający tu rolę punktu K w równaniach dwóch momentów. W punkcie tym (F_{34}) moment zginający równa się oczywiście zeru. Przechodząc w podobny sposób od przedziału do przedziału i stosując analogiczny sposób rozumowania i do prawej krańcowej podpory, znajdziemy dla każdego przęsła belki dwa ogniska, których położenie określa równanie (414) i które nazywamy lewymi i prawymi w zależności od tego, czy odpowiadają lewej czy też prawej krańcowej podporze belki ciągłej. Odcięte punktów ogniskowych są wielkościami czysto geometrycznymi i nie zależą od obciążeń belki.

Wyobraźmy sobie teraz, że przęsło 45 belki (rys. 225) zostało obciążone i że wykres momentów zginających tego przęsła, rozpatrywanego, jako belka rozcięta na dwóch podporach, ma kształt ograniczony krzywą 4c5 (rys. 225).



Rys. 225.

O ile przeprowadzimy, jak wyżej, wyznaczenie ognisk dla tak obciążonej belki, to okaże się, że w przęsłach 12, 23 i 34 położenie lewych ognisk nie ulegnie zmianie. Niech teraz 4a i 5b będą odcinkami, przedstawiającymi w skali momentów momenty podporowe w punktach 4 i 5. W przęsłach, leżących na lewo od przęsła 45, znamy punkty ogniskowe; w nich moment zginający równy jest zeru. Ponieważ nad każdym z przęseł nieobciążonych wykres momentów musi mieć kształt prostej, to dla otrzymania wykresu momentów zginających w naszym wypadku pozostaje tu nam przeprowadzić z jednej strony łamaną linię $a F_{34} 3' F_{23} 2' 1$, z drugiej zaś prostą $b6$.

Położenie ognisk belki ciągłej daje pewne wskazówki, co do sposobu najniekorzystniejszego obciążenia całej belki.

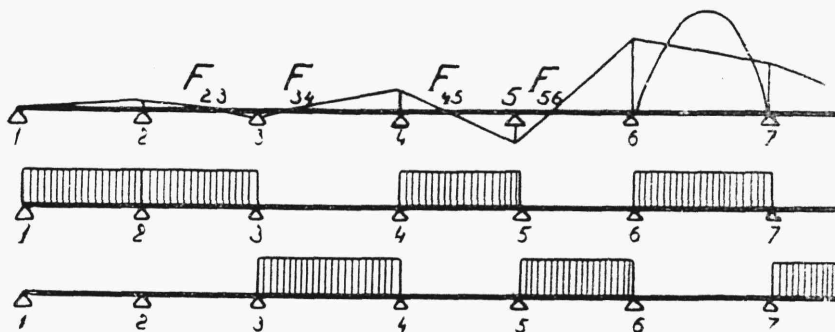
Przypuśćmy więc np., że chodzi o obciążenie belki w ten sposób, aby moment nad podporą 2 (rys. 226 i 227) był największy i wyginał belkę ku górze. Sporządzamy wykres (rys. 226) podobny do podanego na rys. 225

i z niego ustalamy, jak wpływają obciążenia kolejnych przęseł belki ciągłej na moment podporowy w punkcie 2.

Jeżeli obciążymy przęsło 12, to przęsło to odegra rolę przęsła 67 z rys. 226, a podpora 2 rolę podpory 7. Będzie z tego wynikało, że obciążenie przęsła 12 zwiększy moment ujemny nad podporą 2.

Jeżeli obciążymy przęsło 23, wówczas ono odegra tu rolę przęsła 67, a podpora 2 rolę podpory 6. Będzie z tego wynikało, że obciążenie przęsła 23 również zwiększy moment ujemny nad podporą 2.

Jeżeli obciążymy przęsło 34, wtedy to przęsło odegra rolę przęsła 67, a podpora 2 rolę podpory 5. Będzie z tego wynikało, że obciążenie przęsła 34 zmniejszy moment ujemny na podporze 2.



Rys. 226, 227 i 228.

Widać stąd, iż dla otrzymania $\max M$ nad podporą 2 trzeba przede wszystkim obciążyć oba przęsła przylegające do tej podpory, następnie zaś co drugie przęsło belki ciągłej. Dla otrzymania nad podporą 2 najmniejszego momentu podporowego, należałoby obciążyć belkę w sposób przedstawiony na rys. 228.

Z rysunku 226 widocznem jest, jak szybko zmniejsza się wzdłuż belki ciągłej wpływ obciążenia danego przęsła.

6. Linje wpływowe dla belek statycznie niewyznaczalnych ¹⁾.

Podstawą do obliczenia linii wpływowych belek statycznie niewyznaczalnych są linie wpływowe momentów podporowych, gdyż od tych linii przechodzimy do linii wpływowych dla momentów zginających, reakcyj

¹⁾ Rzędne linii wpływowych dla belek ciągłych znaleźć można np. w tablicach G. Griot'a (Zürich) i w pracy A. Cart'a i L. Portes'a p. t. „Calcul des ponts métalliques”.