

Wykres momentów zginających ma tu kształt przedstawiony na rys. 212.

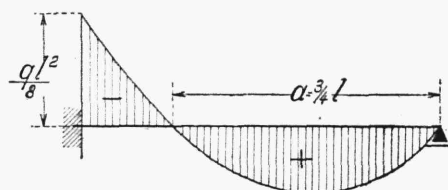
Gdyby belka była obciążona siłą skupioną P (rys. 211), odległą o a od końca A , wówczas zamiast y_B^q musielibyśmy wstawić w równanie (366) ugięcie y_B^P ; wywołane ciężarem P .

Ugięcie to równałoby się w danym wypadku (por. rys. 148):

$$y_B^P = y_C^P + (l - a) \cdot \varphi_C^P + y_B \quad (384)$$

gdzie y_C^P i φ_C^P oznaczają odpowiednio ugięcie i kąt obrotu przekroju belki w punkcie zaczepienia siły P , a y_B pionowe przesunięcie punktu B względem punktu C .

Przy obliczeniu belki utwierdzonej w jednym i swobodnie podpartej w drugim końcu możemy zastosować również sposób postępowania, podany wyżej dla belki w dwóch końcach utwierdzonej, polegający na przyjęciu belki w dwóch końcach podpartej za układ zastępczy i na wyzyskaniu wzorów (349), (350) i następnych w założeniu, że $M_B = 0$.

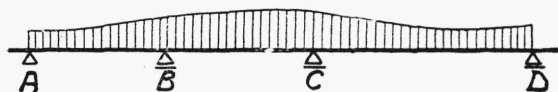


Rys. 212.

Obliczenie ugięć nie następuje tu żadnych specjalnych trudności i odbywa się według metod rozdz. VII.

4. Obliczenie belek ciągłych i twierdzenie o trzech momentach ¹⁾.

Ciągłymi nazywamy belki wsparte na szeregu podpór (rys. 213). Przy obciążeniu pionowym wszystkie podpory mogą tu być przegubowo-przesuwne, przy siłach zaś in-



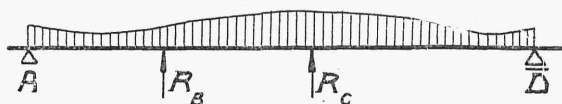
Rys. 213.

czej skierowanych jedna z podpór musi być nieprzesuwna. Liczbę wielkości statycznie niewyznaczalnych

w belce ciągłej wyznaczamy według § 1. Również i obliczenia prowadzi-

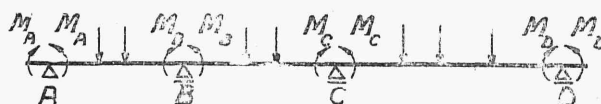
¹⁾ Twierdzenie to bywa nazywane twierdzeniem Clapeyron'a, chociaż zostało po raz pierwszy ogłoszone przez Bertot (por. Mohr, op. cit. str. 340).

my tu według metody wyłożonej w tym paragrafie. Za układ zastępczy możemy przyjąć albo belkę na dwóch podporach, uważając reakcje odrzuconych podpór pośrednich za siły zewnętrzne (schemat rysunku 214), albo też szereg belek swobodnych, obciążonych na podporach przez momenty



Rys. 214.

równe odpowiednim momentom podporowym (schemat rysunku 215).



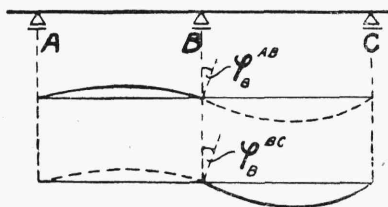
Rys. 215

W pierwszym wypadku bezpośrednio przystępujemy do obliczenia reakcji B i C z równań:

$$y_B^B - y_B^P = 0 \quad y_C^C - y_C^P = 0 \quad (385)$$

gdzie y_B^B oznacza ugięcie belki AD (rys. 214) pod działaniem sił R_B i R_C w punkcie B zaczepienia siły R_B , a y_B^P ugięcie tej samej belki pod działaniem sił zewnętrznych w tym samym punkcie B .

W drugim wypadku korzystamy z równań (rys 216):



Rys. 216.

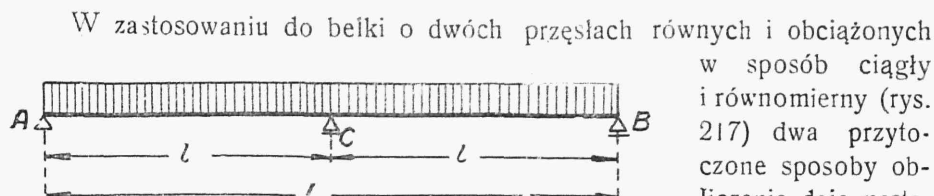
$$\begin{aligned} \varphi_B^{AB} - \varphi_B^{BC} &= 0 \\ \varphi_C^{BC} - \varphi_C^{CD} &= 0 \end{aligned} \quad (386)$$

gdzie φ_B^{AB} oznacza kąt obrotu końcowego przekroju B belki AB pod działaniem zarówno momentu M_B , jak

i sił zewnętrznych przęsła AB . W ten sam sposób należy rozumieć i inne kąty φ (rys. 215).

W obydwóch sposobach rozwiązania liczba równań odpowiada liczbie niewiadomych ¹⁾.

¹⁾ Belki ciągle załamane w planie omówione są w pracy autora „Teoria dźwignów załamanych w planie”, 1926, str. 32.



Rys. 217.

Mamy tu w pierwszym wypadku (według równania 385):

$$y_C^C = \frac{1}{48} \cdot \frac{R_C \cdot L^3}{EJ} \quad (387)$$

$$y_C^P = \frac{5}{384} \cdot \frac{q L^4}{EJ} \quad (388)$$

$$y_C^C - y_C^P = \frac{1}{48} \cdot \frac{R_C \cdot L^3}{EJ} - \frac{5}{384} \cdot \frac{q L^4}{EJ} = 0 \quad (389)$$

$$R_C = \frac{5}{8} q L = \frac{5}{8} \cdot 2 q l \quad (390)$$

Przy postępowaniu drugim ze wskazanych sposobów otrzymujemy:

$$\varphi_C^{AC} = \frac{M_C \cdot l}{3 EJ} - \frac{q l^3}{24 EJ} \quad (391)$$

Wobec tego, że równanie (386) jest w danym razie tożsamością, wyznaczamy M_C z równania $\varphi_C^{AC} = 0$, które ma miejsce ze względu na symetrię belki i jej obciążenia. Otrzymujemy moment ujemny:

$$M_C = -\frac{1}{8} \cdot q l^2$$

Znając reakcje podpór w pierwszym wypadku i moment nad podporą w drugim, dalsze obliczenie prowadzimy, jak dla zwykłych belek na dwóch podporach.

Obliczenie belek ciągłych drogą wyznaczenia momentów nad podporami jest dogodniejsze w użyciu, głównie ze względu na uproszczenia, któ-

re pozwala wprowadzić do rachunku dzięki twierdzeniom o trzech i o dwóch momentach podporowych.

Ustawiamy równanie (386) dla jednej z podpór belki ciągłej (np. dla B na rys. 213):

$$\varphi_B^{AB} - \varphi_B^{BC} = 0 \quad (392)$$

Kąty, wchodzące w równanie (392), obliczamy ze wzorów dla kątów obrotu końcowych przekrojów belek w dwóch punktach podpartych i znajdujących się, poza działaniem sił zewnętrznych, jedna pod działaniem momentów M_B i M_A , druga zaś pod działaniem momentów M_B i M_C . Mamy więc (por. rozdz. VII):

$$\varphi_B^{AB} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_B \cdot l_{AB}}{3} + \frac{M_A \cdot l_{AB}}{6} \right) + \varphi_{oB}^{AB} \quad (393)$$

$$\varphi_B^{BC} = - \frac{1}{EJ} \left(\frac{M_B \cdot l_{BC}}{3} + \frac{M_C \cdot l_{BC}}{6} \right) - \varphi_{oB}^{BC} \quad (394)$$

W równaniach (393) i (394) znaki przyjęte są w ten sposób, jakgdyby belki AB i BC obie wyginały się ku dołowi, a momenty podporowe uważane są za wyginające belkę również w tym kierunku.

Kąty φ_{oB}^{AB} i φ_{oB}^{BC} oznaczają obroty przekrojów poprzecznych belek AB i BC nad podporą B pod działaniem sił zewnętrznych.

Wstawiając wzory (393) i (394) w równanie (392) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_A \cdot l_{AB} + 2M_B(l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = \\ = - 6EJ(\varphi_{oB}^{AB} + \varphi_{oB}^{BC}) \end{aligned} \quad (395)$$

Równanie (395) wyraża twierdzenie o trzech momentach.

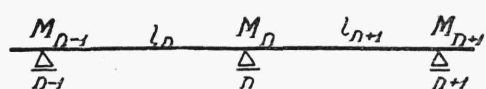
Wprowadzamy w dalszym ciągu dla kątów φ_{oB}^{AB} i φ_{oB}^{BC} wzory (por. rozdz. VII, 6):

$$\varphi_{oB}^{AB} = \frac{\mathfrak{B}_{AB}}{EJ} \quad \varphi_{oB}^{BC} = \frac{\mathfrak{B}_{BC}}{EJ}$$

gdzie \mathfrak{B} oznacza reakcję podpory B belki swobodnie podpartej AB lub BC od jej obciążenia wtórnego, odpowiadającego ciężarom bezpośrednio znajdującym się na tej belce.

W związku z tem równanie (395) przekształca się w następujące:

$$\begin{aligned} M_A \cdot l_{AB} + 2 M_B (l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = \\ = - 6 (\mathfrak{B}_{AB} + \mathfrak{B}_{BC}) \end{aligned} \quad (396)$$



Rys. 218.

Wprowadzając do wzoru (395), zamiast liter, numerację podpór (rys. 218) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_{n-1} \cdot l_n + 2 M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = \\ = - 6 (\mathfrak{B}_n + \mathfrak{B}_{n+1}) \end{aligned} \quad (397)$$

Równanie (395), względnie (396), dotyczy belki ciągłej o przekroju poprzecznym stałym. O ile przekrój poprzeczny belki jest różny w różnych jej przęsłach, wówczas we wzorze (393) należy zastąpić moment bezwładności J przez moment bezwładności J_{AB} , dotyczący tylko przęsła AB , zaś we wzorze (394) należy zastąpić J przez J_{BC} . Wobec tych zmian otrzymamy, zamiast równania (396), równanie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E J_{AB}} (M_A \cdot l_{AB} + M_B \cdot l_{AB}) + \frac{1}{E J_{BC}} (M_B \cdot l_{BC} + M_C \cdot l_{BC}) = \\ = - 6 \frac{\mathfrak{B}_{AB}}{E J_{AB}} - 6 \frac{\mathfrak{B}_{BC}}{E J_{BC}} \end{aligned} \quad (398)$$

Aby równanie to przybrało formę analogiczną do formy równania (396), wprowadzamy tu następujące oznaczenia:

$$l'_{BC} = l_{BC} \cdot \frac{J_{AB}}{J_{BC}} \quad \mathfrak{B}'_{BC} = \mathfrak{B}_{BC} \cdot \frac{J_{AB}}{J_{BC}}$$

Gdybyśmy, w dalszym ciągu, chcieli ustalić zależność między momentami M_B , M_C i M_D , to musielibyśmy wprowadzić oznaczenia:

$$l''_{CD} = l'_{CD} \cdot \frac{J_{BC}}{J_{CD}} = l_{CD} \cdot \frac{J_{AB}}{J_{BC}} \cdot \frac{J_{BC}}{J_{CD}} = l_{CD} \cdot \frac{J_{AB}}{J_{CD}}$$

$$\zeta''_{CD} = \zeta'_{CD} \cdot \frac{J_{BC}}{J_{CD}} = \zeta_{CD} \cdot \frac{J_{AB}}{J_{BC}} \cdot \frac{J_{BC}}{J_{CD}} = \zeta_{CD} \cdot \frac{J_{AB}}{J_{CD}}$$

Wynika stąd, że o ile oznaczymy przez J_0 moment bezwładności przekroju poprzecznego jednego z przęseł belki ciągłej, to możemy uważać przekrój belki za stały, jeżeli w równanie trzech momentów (396) wstawimy, zamiast długości przęseł l_{AB} , l_{BC} , l_{CD} i t. d., długości następujące:

$$l'_{AB} = l_{AB} \cdot \frac{J_0}{J_{AB}} \quad l'_{BC} = l_{BC} \cdot \frac{J_0}{J_{BC}} \text{ i t. d.} \quad (399)$$

oraz zamiast wielkości \mathfrak{B}_{AB} , \mathfrak{B}_{BC} , ζ_{BC} , ζ_{CD} i t. d. wielkości:

$$\mathfrak{B}'_{AB} = \mathfrak{B}_{AB} \cdot \frac{J_0}{J_{AB}} \quad \mathfrak{B}'_{BC} = \mathfrak{B}_{BC} \cdot \frac{J_0}{J_{BC}} \text{ i t. d.} \quad (399')$$

Równanie trzech momentów przybiera wówczas postać następującą:

$$M_A \cdot l'_{AB} + 2M_B(l'_{AB} + l'_{BC}) + M_C \cdot l'_{BC} =$$

$$= -6(\mathfrak{B}'_{AB} + \mathfrak{B}'_{BC}) \quad (400)$$

O ile moment bezwładności przekroju poprzecznego belki ciągłej ulega zmianie nawet w granicach jednego przęsła, wówczas najprostszy sposób wyznaczenia momentów podporowych będzie polegał na obliczeniu kątów φ_B^{AB} i φ_B^{BC} (wzory 393 i 394) sposobem momentów wtórnych, z uwzględnieniem zmiany przekroju belki (por. rozdz. VII, 6), oraz na rozwiązaniu kolejnych równań (392).

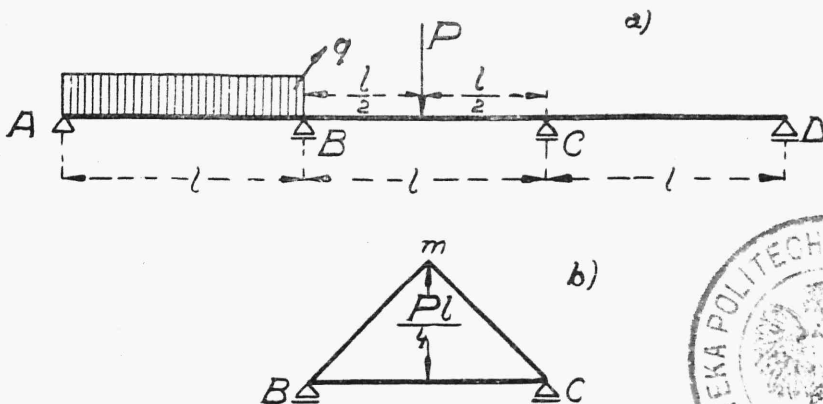
Zastosujemy równanie trzech momentów do obliczenia belki trójpzęsłowej, przedstawionej na rys. 219. Obciążenie wtórne przęsła AB ma tu kształt paraboli i dlatego w danym wypadku (rozdz. VII, 6):

$$\mathfrak{S}_{AB} = \frac{ql^3}{24}$$

Dla przęsła BC obciążenie wtórne ma kształt trójkąta równoramiennego, wobec czego (rys. 219):

$$\mathfrak{S}_{BC} = \mathfrak{S}_{BC} = \frac{Pl}{4} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{16}$$

Stosujemy twierdzenie o trzech momentach dwukrotnie, raz do podpór A, B, C i drugi raz do podpór B, C, D :



Rys. 219.



$$\begin{aligned} M_A \cdot l + 4M_B \cdot l + M_C \cdot l &= -6 \left(\frac{ql^3}{24} + \frac{Pl^2}{16} \right) \\ M_B \cdot l + 4M_C \cdot l + M_D \cdot l &= -6 \left(\frac{Pl^2}{16} + 0 \right) \end{aligned} \quad (401)$$

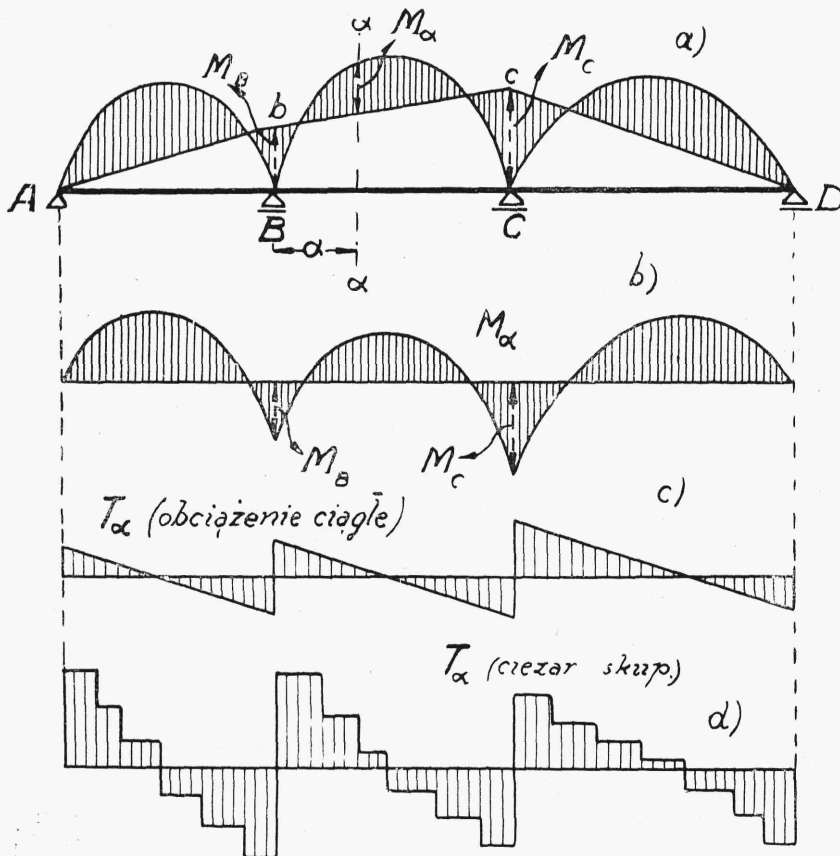
Wobec tego, że $M_A = M_D = 0$, dochodzimy do 2 następujących równań z 2 niewiadomymi:

$$4M_B \cdot l + M_C \cdot l = -6 \cdot \left(\frac{ql^3}{24} + \frac{Pl^2}{16} \right) \quad (402)$$

$$M_B \cdot l + 4M_C \cdot l = -6 \cdot \frac{Pl^2}{16}$$

z których wyznaczamy niewiadome momenty podporowe.

Dla belki przedstawionej na rys. 220 i dla pewnego obciążenia pionowego odcinki Bb i Cc przedstawiają momenty podporowe M_B i M_C .



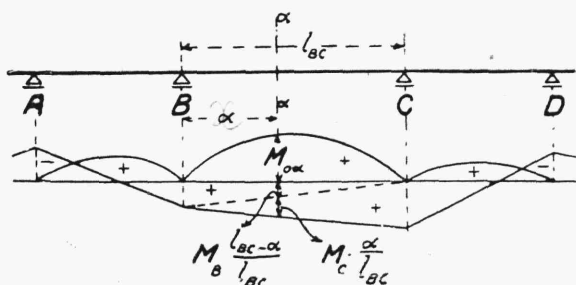
Rys. 220.

Momenty te wywołują w sąsiednich przęsłach belki ciągłej momenty zginające, zmieniające się w sposób linijowy (proste Ab, bc, cD). Trójkątne

wykresy momentów zginających, wywołanych przez momenty podporowe przęsła BC , tworzą łącznie trapez $BbcC$, przyczem prosta bc przecina się z krzywą, ograniczającą wykres momentów sił zewnętrznych. Przestrzeń, zawarta między temi linjami (na rysunku zacieniowana) daje wykres momentów, zginających belkę. Dotyczy to w tej samej mierze i innych przęseł belki.

Na rysunku 220b przedstawiony jest wykres momentów zginających belki ciągłej, sprowadzony do poziomej prostej. Odpowiedni wykres przy obciążeniu siłami skupionymi składa się już nie z linii krzywych, lecz z łamanych.

Na podstawie rysunku 221, wyobrażającego wykres momentów zgi-



Rys. 221.

nających dla fragmentu belki ciągłej, można napisać, że moment zginający w przekroju $\alpha\alpha$ belki ciągłej równa się:

$$M_{\alpha}^{BC} = M_{\alpha\alpha}^{BC} + M_B \cdot \frac{l_{BC} - \alpha}{l_{BC}} + M_C \cdot \frac{\alpha}{l_{BC}} \quad (403)$$

gdzie $M_{\alpha\alpha}^{BC}$ oznacza moment zginający w przekroju $\alpha\alpha$ przęsła BC belki podpartej w punktach B i C i obciążonej siłami zewnętrznymi, znajdującymi się na tej belce, a α odległość przekroju $\alpha\alpha$ od punktu B , początku przęsła BC .

Siłę poprzeczną w przekroju $\alpha\alpha$ znajdujemy, różniczkując wzór (403):

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{BC} &= \frac{dM_{\alpha\alpha}^{BC}}{dx} + \frac{M_C - M_B}{l_{BC}} = \\ &= T_{\alpha\alpha}^{BC} + \frac{M_C - M_B}{l_{BC}} \end{aligned} \quad (404)$$

$T_{\alpha\alpha}$ oznacza tu siłę poprzeczną w przekroju $\alpha\alpha$, liczoną dla samych tylko sił zewnętrznych, działających na belkę BC , swobodnie podpartą.

Ze wzoru (404) obliczamy siłę poprzeczną w punkcie B dla przęsła AB i dla przęsła BC .

$$T_B^{AB} = T_{oB}^{AB} + \frac{M_B - M_A}{l_{AB}} \quad (405)$$

$$T_B^{BC} = T_{oB}^{BC} + \frac{M_C - M_B}{l_{BC}} \quad (406)$$

Gdyby każde z przęseł AB i BC było oddzielną belką na dwóch podporach, wówczas siły T_B^{AB} i T_B^{BC} odpowiadałyby reakcjom podpory B . W danym wypadku reakcję B znajdujemy, jako różnicę sił poprzecznych w punktach nieskończenie bliskich od punktu B na prawo i na lewo. Mamy więc:

$$\begin{aligned} R_B &= T_B^{BC} - T_B^{AB} = \\ &= T_{oB}^{BC} - T_{oB}^{AB} + \frac{M_C - M_B}{l_{BC}} - \frac{M_B - M_A}{l_{AB}} \end{aligned} \quad (407)$$

Na rys. 220d przedstawiony jest wykres sił poprzecznych dla belki ciągłej przy obciążeniu siłami skupionymi, a na rys. 220c taki sam wykres dla obciążenia ciągłego.

Siły T_{oB}^{AB} i T_{oB}^{BC} są to reakcje belki AB nad podporą B i belki BC nad podporą B w razie, gdyby belki te były swobodnie podparte w punktach A i B i odpowiednio w B i C .

Po wyznaczeniu momentów zginających w belce ciągłej obliczenie jej odkształceń odbywa się w ten sam sposób, jak dla belek statycznie wyznaczalnych, t.j. albo metodą momentów wtórnych, albo też zapomocą bezpośredniego całkowania równania odkształconej, czyli według wzoru:

$$y = \frac{\mathfrak{M}}{EJ} \quad (408)$$

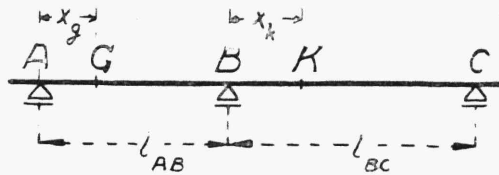
lub według równania:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M \quad (409)$$

W tym ostatnim wypadku należy mieć na uwadze kąty podane we wzorach (333) i (394), które uzupełniają liczbę zależności, potrzebnych do wyznaczenia stałych całkowania.

5. Twierdzenie o dwóch momentach i ogniska belki ciągłej.¹⁾

Dalsze uproszczenia w obliczeniu belek ciągłych mogą być uzyskane na podstawie twierdzenia o dwóch momentach.



Rys. 222.

Bierzemy w dwóch sąsiednich przęsłach AB i BC belki ciągłej dwa punkty G i K (rys. 222) i wypisujemy wzory dla momentów zginających w tych punktach. Na podstawie wzoru (403) mamy:

$$M_G^{AB} = M_{oG}^{AB} + M_A \cdot \frac{l_{AB} - x_g}{l_{AB}} + M_B \cdot \frac{x_g}{l_{AB}} \quad (410)$$

$$M_K^{BC} = M_{oK}^{BC} + M_B \cdot \frac{l_{BC} - x_k}{l_{BC}} + M_C \cdot \frac{x_k}{l_{BC}} \quad (411)$$

Momenty podporowe M_A i M_C uważamy za niewiadome dwóch równań (410) i (411), z których je wyznaczamy. Otrzymane tą drogą wartości M_A i M_C wstawiamy w równanie trzech momentów:

$$\begin{aligned} M_A \cdot l_{AB} + 2M_B(l_{AB} + l_{BC}) + M_C \cdot l_{BC} = \\ = -6(\mathfrak{S}_{AB} + \mathfrak{S}_{BC}) \end{aligned} \quad (412)$$

¹⁾ M. Lévy, op. cit., II, str. 302.