

Jeżeli σ_x^0 oznacza naprężenie na powierzchni zapory od strony wody, wówczas mamy, że

$$\int_0^x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx = \sigma_x - \sigma_x^0 = 0 \quad (934)$$

skąd

$$\sigma_x = \sigma_x^0 \quad (935)$$

Ponieważ zaś naprężenie normalne na powierzchni AB zapory równa się:

$$\sigma_x^0 = \gamma \quad (936)$$

więc dla naprężenia σ_x otrzymujemy wzór:

$$\sigma_x = \gamma \quad (937)$$

co znaczy, że naprężenia σ_x są w danym przekroju poziomym zapory stałe.

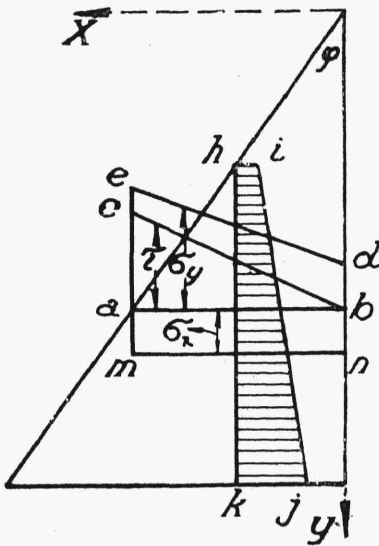
Na rys. 447 prosta ed przedstawia wykres naprężeń σ_y w przekroju poziomym ab , prosta cb wykres naprężeń τ w tym samym przekroju, wreszcie ij wykres naprężeń σ_x w przekroju pionowym hk i mn wykres tych samych naprężeń w danym przekroju poziomym.

W razie gdy obie płaszczyzny, ograniczające z boków zapórę, są nachylone względem płaszczyzny pionowej, a nie jedna

tylko, jak w zadaniu poprzednim, wówczas w równaniu (930) stała całkowania C nie jest równa zeru, a wykresy naprężeń τ i σ_x mają kształt trapezów.

4. Linje jednakowych naprężeń w murach szczelnych.

Wykreślenie dla murów szczelnych, w szczególności zaś dla zapór, linii jednakowych naprężeń głównych (σ_{max}) i największych naprężeń stycznych (τ_{max}), tak samo, jak wykreślenie podobnych linii dla belek (por. rozdz. VIII, 4) ma na celu charakterystykę pracy materiału muru i wskazanie w nim miejsc pod względem wytrzymałościowym najmniejbezpiecznych



Rys. 447.

Bierzemy ogólny wypadek zapory o przekroju, mającym kształt trapezu o bokach zakrzywionych (rys. 448). Przeprowadzamy szereg przekrojów poziomych w zaporze i rozpoczynamy wyznaczenie linii jednakowych naprężeń od sporządzenia wykresów naprężeń σ_y , σ_x i τ dla tych przekrojów.

Dla naprężeń σ_y w pewnym przekroju aa' zapory zakładamy, jak poprzednio, rozkład prostoliniowy. Do sporządzenia wykresu naprężeń w tym wypadku dostatecznym jest wyznaczenie wartości σ_y (ze wzoru 910) dla końcowych punktów a i a' każdego przekroju poprzecznego aa' (rys. 448 i AA' na rys. 449).

Przechodzimy do naprężeń σ_x .

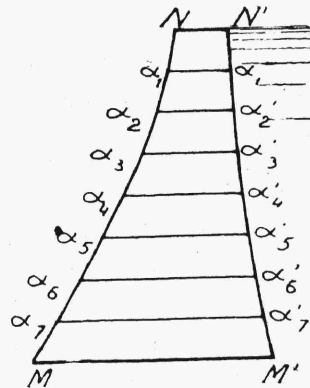
Naprężenia σ_x w pewnym przekroju zapory prostokątnej zmieniają się według reguły (por. § 3):

$$\sigma_x = \eta \left[1 - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right] \quad (938)$$

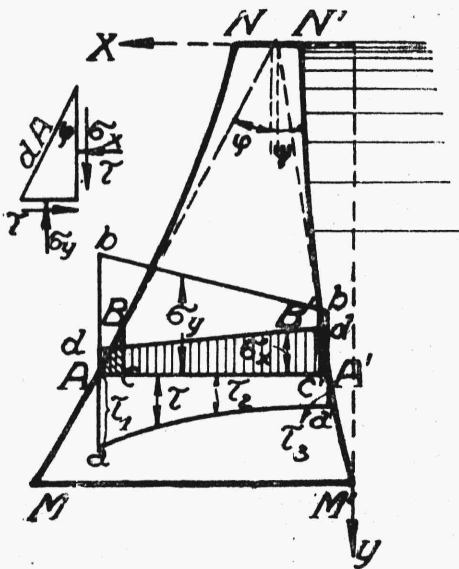
Ponieważ wzór (938) daje dla wykresu σ_x przebieg niezbyt różniący się od prostoliniowego, a w zaporze trójkątnej naprężenia σ_x albo wogóle nie zmieniają się w przekroju, albo zmieniają się według prostej, niema więc powodu oczekiwać, aby przebieg wykresu σ_x w zaporze trapezowej, będącej zatem kombinacją prostokąta i trójkąta, znacznie różnił się od prostoliniowego. Zakładając taki właśnie rodzaj zmienności dla naprężeń σ_x w zaporze trapezowej, potrzebujemy dla sporządzenia odpowiedniego wykresu w przekroju aa' znać tylko naprężenia σ_x w punktach a i a' (rys. 448).

Wykres naprężeń τ ma w przekroju aa' zapory prostokątnej przebieg paraboliczny, a w takim samym przekroju zapory trójkątnej przebieg prostoliniowy. Wobec tego przyjmujemy,

że w zaporze trapezowej wykres ten będzie miał kształt trapezu ograniczo-



Rys. 448.



Rys. 449.

nego linją krzywą (paraboliczną), którą wykreślamy na podstawie wartości naprężeń τ w punktach końcowych A i A' przekroju i w jego środku (rys. 449).

Aby wyznaczyć naprężenia σ_x , σ_y i τ na końcach poszczególnych przekrojów zapory, ustawiamy równania równowagi dla nieskończenie małych trójkątów (graniastosłupów) ABC i $A'B'C'$, przylegających do bocznych powierzchni zapory zarówno od strony wody, jak i od strony powietrza, i ograniczonych odpowiednio temi powierzchniami i płaszczyznami równoległymi do osi współrzędnych.

Oznaczamy przez φ kąt, jaki tworzy z osią Y -ów prosta BA (ślad nieskończenie małego odcinka powierzchni zapory, ograniczającego graniastosłup ABC) i przez dA pole AB . Na powierzchnię AB graniastosłupa ABC żadne siły nie działają, na AC działają naprężenia normalne σ_y^0 i styczne τ^0 , a na BC naprężenia normalne σ_x^0 i styczne τ^0 . Równania równowagi przybierają dla ABC postać następującą:

$$\sum X = \sigma_x^0 dA \cos \varphi - \tau^0 dA \sin \varphi = 0 \quad (939)$$

$$\sum Y = \sigma_y^0 dA \sin \varphi - \tau^0 dA \cos \varphi = 0 \quad (940)$$

skąd wynika, że

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (941)$$

$$\tau^0 = \sigma_y^0 \operatorname{tg} \varphi \quad (942)$$

Wzór dla naprężeń głównych na powierzchni zapory MN (od strony powietrza) otrzymujemy z równania:

$$\sigma_{\max}^0 = \frac{\sigma_x^0 + \sigma_y^0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y^0 - \sigma_x^0)^2 + 4 \tau^{02}} \quad (943)$$

które tu przybiera następującą postać:

$$\sigma_{\max}^0 = \frac{\sigma_y^0 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^{02} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 + 4 \sigma_y^{02} \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$\sigma_{\max}^0 = \sigma_y^0 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \quad (944)$$

Dla nieskończenie małego trójkąta $A'B'C'$, przylegającego do powierzchni $M'N'$ zapory t. j. położonego od strony wody, otrzymujemy, zamiast równań (939) i (940), równania następujące (tu σ_x' odpowiada σ_x^0 i t.d.):

$$p \cos \psi = \sigma_x' \cos \psi + \tau' \sin \psi \quad (945)$$

$$p \sin \psi = \tau' \cos \psi + \sigma_y' \sin \psi \quad (946)$$

gdzie p oznacza jednostkowe parcie wody, a ψ kąt nachylenia $B'A'$ względem osi Y -ów. Z równań (945) i (946) otrzymujemy, że

$$\sigma_x' = p + (\sigma_y' - p) \operatorname{tg}^2 \psi \quad (947)$$

$$\tau' = (p - \sigma_y') \operatorname{tg} \psi \quad (948)$$

Największe naprężenie główne w punkcie A' na powierzchni $M'N'$ wyniesie:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\max} &= \frac{\sigma_x' + \sigma_y'}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x' - \sigma_y')^2 + 4\tau'^2} = \\ &= \sigma_y' (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) - p \operatorname{tg}^2 \psi \end{aligned} \quad (949)$$

Dla wyznaczenia największych naprężeń głównych w poszczególnych punktach K przekroju AA' wstawiamy we wzór

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (950)$$

zamiast σ_x , σ_y , τ wartości tych naprężeń, wzięte dla punktów K z odpowiednich wykresów.

Wykresy σ_x i σ_y (rys. 449), jako mające kształt prostych, możemy sporządzić na podstawie wartości σ_x i σ_y , otrzymanych ze wzorów (941), (947) i (910) dla punktów A i A' (ogólnie dla punktów α i α').

Do sporządzenia wykresu τ , poza dwiema wartościami tego naprężenia, obliczonymi dla punktów A i A' ze wzorów (942) i (948), musimy obliczyć jeszcze naprężenie, odpowiadające środkowi wykresu. W tym celu ustawiamy równanie:

$$\frac{y^2}{2} - \int_0^a \tau dx = 0 \quad (951)$$

wyrażające, że wypadkowa sił stycznych, działających w danym przekroju AA' musi równoważyć się z parciem poziomym na zapórę wody ponad tym przekrojem (a oznacza tu szerokość zapory w danym przekroju).

Według wzoru Simpson'a (dla przybliżonego obliczenia całek określonych) mamy:

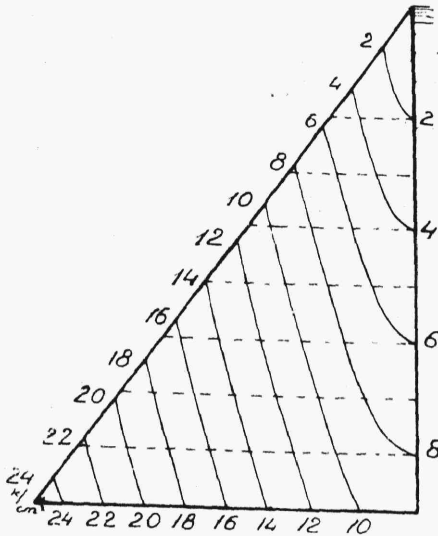
$$\int_0^a \tau dx = \frac{a}{6} (\tau_1 + 4\tau_2 + \tau_3) \quad (952)$$

gdzie τ_1 i τ_3 oznaczają wartości naprężenia τ w punktach A i A' (ogólnie x i x') a τ_2 wartość tegoż naprężenia w środku przekroju¹⁾.

Przekształcając równanie (951) w związku ze wzorem (952), otrzymujemy:

$$\tau_2 = \frac{3y^2}{4a} - \frac{\tau_1 + \tau_3}{4} \quad (953)$$

poczem już możemy sporządzić wykres dla τ w przekroju AA' (lub xx').



Rys 450.

Mając obliczone σ_{\max} dla poszczególnych punktów K w poszczególnych przekrojach zapor, możemy połączyć krzywymi punkty zapor, w których naprężenia σ_{\max} są sobie równe i otrzymać w ten sposób linie jednakowych naprężeń σ_{\max} . Przykład linii jednakowych naprężeń dla zaporu trójkątnej przedstawiony jest na rys. 450. Linie dla σ_{\max} mają tu kształt hiperboliczny.

Praktyka inżynierska wykazuje, że największe niebezpieczeństwo grozi często zaporom ze strony największych naprężeń stycznych. Aby otrzymać

linie tych naprężeń, uciekamy się do wzoru:

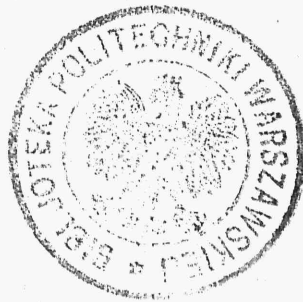
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (954)$$

¹⁾ Por. O. Mohr op. cit. str. 284.

i obliczamy z niego τ_{\max} dla szeregu punktów K pewnego przekroju aa' . Łącząc ze sobą punkty o jednakowych wartościach τ_{\max} , otrzymujemy linie naprężeń τ_{\max} . Naodwrot, zakładając $\tau_{\max} = R_t$, gdzie R_t jest to największe dla muru naprężenie ścinające, otrzymujemy odpowiednią linię dla naprężenia R_t , która pozwoli nam znaleźć w murze punkty najniebezpieczniejsze. Linie jednakowych naprężeń τ_{\max} mają dla zapor trójkątnych kształt eliptyczny¹⁾.

Linie izostatyczne i linie poślizgowe, będące torami naprężeń stycznych, możemy wyznaczyć w zaporach w myśl wskazówek danych w rozdz. VIII, 4.

Dla zapor o przekroju trójkątnym linie izostatyczne dają się wyznaczyć stosunkowo prosto²⁾.



¹⁾ Przykłady linii jednakowych naprężeń dla murów szczelnych o kształcie nie-trójkątnym znaleźć można w pracy autora „Rozkład naprężeń w murach szczelnych” odbitka z Przeglądu Technicznego, 1928 r.

²⁾ G. Pigeard, „Résistance des matériaux”, 1920, str. 740 i „Annales des ponts et chaussées”, 1923, IV, str. 350,