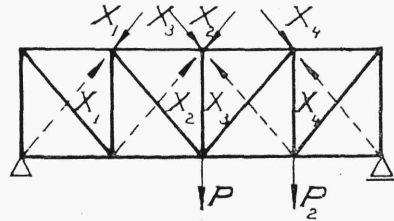


szczyźnie sił o kąt $\Delta\varphi$ był równy $\Pi \cdot a = 1$, poczem wstawiamy w równanie prac wirtualnych (651), zamiast iloczynu $1 \cdot v_3$ iloczyn $1 \cdot \Delta\varphi$.

6. Kratownice statycznie niewyznaczalne.

O ile w kratownicy geometrycznie niezmienniej liczba prętów $r > 2k - 3$, to różnica $r - (2k - 3)$ wskaże nam liczbę równań, brakujących do wyznaczenia sił we wszystkich prętach. Brakującą liczbę równań statyki uzupełniamy odpowiednią liczbą zależności między odkształceniami kratownicy, przyczem najogólniejszy schemat obliczenia jest następujący:

Przypuśćmy, że chodzi o kratownicę, przedstawioną na rys. 373, posiadającą 4 pręty nadliczbowe. Aby dojść do układu statycznie wyznaczalnego, przecinamy w każdym przedziale kratownicy po jednym krzyżulcu i zastępujemy jego działanie przez dwie siły skierowane ku sobie. Siły te oznaczamy dla poszczególnych krzyżulców przez X_1, X_2, X_3, X_4 i obliczamy zbliżenie się odpowiednich węzłów pod wpływem sił X i zewnętrznych sił P . Zbliżenie węzłów przedstawiamy zapomocą następujących wzorów:



Rys. 373.

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(X_1, X_2, X_3, X_4, P) \\ v_2 &= f_2(X_1, X_2, X_3, X_4, P) \\ v_3 &= f_3(X_1, X_2, X_3, X_4, P) \\ v_4 &= f_4(X_1, X_2, X_3, X_4, P) \end{aligned} \quad (654)$$

Z drugiej strony obliczamy wydłużenia nadliczbowych krzyżulców pod wpływem działających na nie sił:

$$\Delta l_1 = \frac{X_1 l_1}{EA} \quad \Delta l_2 = \frac{X_2 l_2}{EA} \quad \Delta l_3 = \frac{X_3 l_3}{EA} \quad \Delta l_4 = \frac{X_4 l_4}{EA} \quad (655)$$

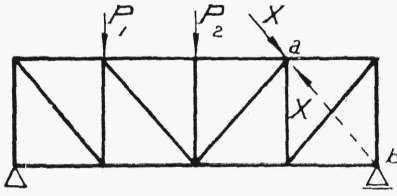
Przyrównywując do siebie odpowiednie v i Δl , obliczone z równań (654) i (655), otrzymujemy potrzebną liczbę 4 równań, brakujących do wyznaczenia sił w czterech prętach nadliczbowych.

Powyższa metoda ogólna, analogiczna do metod rozwiązywania innych zagadnień statycznie niewyznaczalnych, daje się najlepiej zrealizować przez zastosowanie zasady prac wirtualnych w sposobie Maxwell'a i Mohr'a¹⁾.

¹⁾ S. Timoszenko, „Kurs statyki соору́жений”, 1922, str. 53.

O. Mohr, Technische Mechanik, 1914.

Bierzemy np. kratownicę, przedstawioną na rys. 374. Posiada ona jedną nadliczbową niewiadomą, za którą przyjąć możemy krzyżulec ab w przedziale skrajnym. Po rozcięciu krzyżulca zastępujemy go przez dwie siły X (rys. 374). Siły te rozpatrujemy, jako zewnętrzne siły układu.



Rys. 374.

Chodzi tu pośrednio o wyznaczenie zbliżenia się węzłów a i b kratownicy. Wobec tego zaczepiamy w punktach a i b dwie równe i odwrotnie skierowane siły $X = \Pi = 1$, znajdujemy w zależności od nich siły Z_i w poszczególnych prętach kratownicy i ustawiamy odpowiednio do wzoru (650) poprzedniego paragrafu równanie prac wirtualnych:

$$1 \cdot \Delta l_{ab} = - \sum Z_i \Delta l_i \quad (656)$$

w którym Δl_i oznacza wydłużenia poszczególnych prętów kratownicy a Δl_{ab} wydłużenie pręta ab .

Wydłużenia Δl_i są w danym wypadku zależne zarówno od sił P , jak i od sił X , odgrywających tu rolę sił zewnętrznych.

W równaniu (656) zarówno iloczyn $1 \cdot \Delta l_{ab}$ (gdzie 1 jest to szczególna wartość siły X), jak i każdy z iloczynów $Z_i \Delta l_i$, przedstawia pracę ujemną ze względów przytoczonych w paragrafie poprzednim. Równanie to różni się, co do znaków, od równania (650) paragrafu poprzedniego, gdyż w tym ostatnim praca $\Pi \cdot v_3$ miała znak dodatni, jako praca siły zaczepionej z zewnątrz do kratownicy na przesunięciu zgodnym z kierunkiem siły.

Siły, wywołane w poszczególnych prętach kratownicy przez dane obciążenie zewnętrzne (P), oznaczamy przez S_i^P , zaś siły, wywołane w tych samych prętach przez siłę X , przez $Z_i X$ (por. § 2, wzór 625). W ten sposób w każdym pręcie kratownicy będzie działała siła:

$$S_i = S_i^P + Z_i \cdot X \quad (657)$$

Dla wydłużenia każdego pręta kratownicy, z wyjątkiem pręta ab , otrzymujemy wówczas wzór ogólny:

$$\Delta l_i = \frac{(S_i^P + Z_i \cdot X) l_i}{EA_i} \quad (658)$$

W ten sam sposób dla wydłużenia pręta ab otrzymujemy:

$$\Delta l_{ab} = \frac{X l_{ab}}{EA_{ab}} \quad (659)$$

Równanie (656) przybiera więc postać następującą:

$$\frac{X l_{ab}}{EA_{ab}} = - \sum \frac{Z_i (S_i^P + Z_i \cdot X) l_i}{EA_i} \quad (660)$$

a dla siły w pręcie nadliczbowym otrzymujemy wzór:

$$X = - \frac{\sum Z_i \cdot S_i^P \cdot \frac{l_i}{EA_i}}{\sum Z_i^2 \cdot \frac{l_i}{EA_i} + \frac{l_{ab}}{EA_{ab}}} \quad (661)$$

Wzór ten możnaby było również otrzymać na podstawie rozumowania, przytoczonego na wstępie paragrafu, przyjmując, że

$$v_a = \sum Z_i \Delta l_i$$

i że

$$v_a = - \Delta l_{ab} = \frac{X l_{ab}}{EA_{ab}}$$

W razie, gdy długość pręta l_{ab} nie jest należycie dobrana, czyli gdy pręt ten jest zadługi lub zakrótki w porównaniu do odległości ograniczających go węzłów w nieodkształconym stanie kratownicy, wówczas wzór (659) przybiera postać następującą:

$$\Delta l_{ab} = \frac{X l_{ab}}{EA_{ab}} + \Delta_1 l_{ab}$$

gdzie $\Delta_1 l_{ab}$ oznacza konieczny tu początkowy przyrost długości pręta.

W razie, gdy liczba prętów nadliczbowych jest większa od jednego, mamy w zadaniu, zamiast X , szereg sił niewiadomych tegoż rodzaju, wskutek czego ogólny wzór dla wydłużenia pręta przybiera następującą postać:

$$\Delta l_i = \frac{(S_i^P + Z_{1i} X_1 + Z_{2i} X_2 + Z_{3i} X_3 + \dots) l_i}{EA_i} \quad (662)$$

gdzie Z z odpowiednim znacznikiem od dołu wyraża siłę powstającą w danym pręcie i pod działaniem sił $X = 1$, zaczepionych w węzłach, ograniczających dany krzyżulec nadliczbowy i mających kierunek tego krzyżulca.

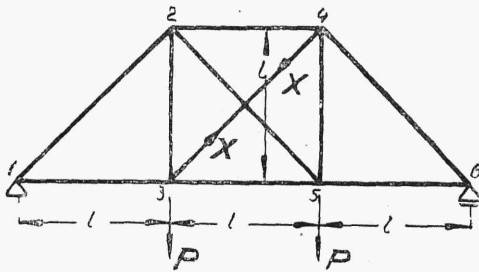
Dla wyznaczenia sił w prętach nadliczbowych otrzymamy szereg równań następującego typu:

$$\frac{X_1 l_1}{EA} = - \sum \frac{Z_{1i} (S_i^P + Z_{1i} X_1 + Z_{2i} X_2 + Z_{3i} X_3 + \dots) l_i}{EA_i} \quad (663)$$

$$\frac{X_2 l_2}{EA} = - \sum \frac{Z_{2i} (S_i^P + Z_{1i} X_1 + Z_{2i} X_2 + Z_{3i} X_3 + \dots) l_i}{EA_i}$$

i t. d.

których liczba odpowiada liczbie niewiadomych sił X .



Rys. 375.

Bierzemy dla przykładu kratownicę statycznie niewyznaczalną przedstawioną na rys. 375. Kratownica ma jeden pręt nadliczbowy, za który uważać będziemy pręt 34. Przecinamy ten pręt i zaczepiamy w węzłach 3 i 4 (Nr. pręta 34) dwie skierowane ku sobie siły $X = 1$. Siły Z , wywołane w prętach kratownicy działaniem tych sił, przytoczone są w tablicy następującej:

Nr. pręta	długość	Z	S^P	ZS^P	Z^2	$S^P + ZX$
12	$1,414 l$	0	$- 1,414 P$	0	0	$- 1,414 P$
13	l	0	P	0	0	P
23	l	$- 0,707$	P	$- 0,707 P$	0,5	$- 0,707 X + P$
24	l	$- 0,707$	$- P$	$0,707 P$	0,5	$- 0,707 X - P$
25	$1,414 l$	$+ 1,000$	0	0	1	X
45	l	$- 0,707$	P	$- 0,707 P$	0,5	$- 0,707 X + P$
46	$1,414 l$	0	$- 1,414 P$	0	0	$- 1,414 P$
56	l	0	P	0	0	P
35	l	$- 0,707$	P	$- 0,707 P$	0,5	$- 0,707 X + P$

Korzystając ze wzoru (660) i uważając EA za stałe dla całej kratownicy, otrzymujemy:

$$\frac{X \cdot l_{34}}{EA} = - \frac{(-1,414 P + 3,414 X) l}{EA}$$

$$\text{skąd } X = 0,293 P.$$

Siły w pozostałych prętach kratownicy wyznaczamy ze wzoru:

$$S_i = S_i^P + Z_i X$$

według ostatniej rubryki tablicy.

Zmiany zasile w temperaturze otoczenia kratownicy w porównaniu do temperatury montażu mogą w pewnych wypadkach wywołać dodatkowe siły w prętach kratownicy.

Przypuśćmy np. iż dwie podpory kratownicy są przegubowe, lecz nieprzesuwne. Tego rodzaju zamocowanie nie pozwala na wydłużenie się kratownicy i dlatego powstają tu w poszczególnych prętach pod działaniem temperatury dodatkowe siły. Wzór dla wydłużenia dowolnego pręta kratownicy przybiera wtedy postać następującą (tu $\Delta l_i = \alpha t l_i$):

$$\Delta l_i = \frac{(S_i^P + Z_i \cdot X) l_i}{EA_i} + \alpha t l_i \quad (664)$$

gdzie α oznacza współczynnik rozszerzalności a t° przyrost temperatury. Wzory typu (664) wstawiamy w równanie (656).

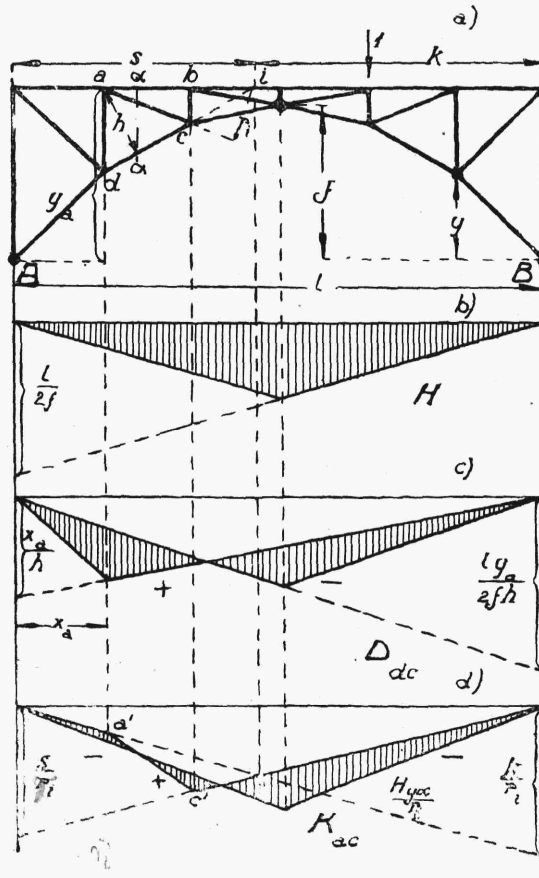
O ile cała kratownica doznaje równomiernego podniesienia lub obniżenia temperatury i o ile nie ma przeszkód, aby zmieniła ona swój kształt na kształt geometrycznie podobny, to żadnych sił termicznych w prętach kratownicy wówczas nie powstanie. Wypadek taki ma np. miejsce, o ile kratownica statycznie wyznaczalna lub niewyznaczalna (wewnętrznie) podparta jest w jednym końcu przegubowo, w drugim zaś przegubowo - przesuwne.

Aby otrzymać przesunięcia poszczególnych węzłów kratownicy statycznie niewyznaczalnej, obliczamy przedewszystkiem siły X , działające na pręt (pręty) nadliczbowy, poczem, uważając te siły za zewnętrzne, postępujemy w dalszym ciągu w ten sam sposób, jak dla kratownic statycznie wyznaczalnych.

Zaznaczyć należy, iż kratownice wewnętrznie statycznie niewyznaczalne bywają stosunkowo rzadko stosowane w budownictwie, zwłaszcza w budowach poważniejszych, natomiast szerokie zastosowanie znajdują tu kratownice statycznie niewyznaczalne pod względem podpór, jak dwuprzegubowe łukowe i ciągłe.

7. Kratownice łukowe i ciągłe.

Kratowy łuk trójp przegubowy ma tę samą linię wpływową dla parcia poziomego, co pełny łuk przegubowy. Dla łuku na rys. 376 ma ona kształt przedstawiony na rys. 376b (por. rozdz. XIII,8).



Rys. 376.

Aby otrzymać linię wpływową dla odcinka dc dolnego pasa kratownicy, robimy przekrój aa' i ustawiamy równania momentów sił, działających na lewą część łuku, względem punktu a :