

zaś dla rzędnych łuku wzór:

$$y = x(l - x) \frac{4f}{l^2}$$

w którym f oznacza strzałkę łuku a l jego rozpiętość.

Powyższe wyrażenia dla R_A , \mathfrak{M} i y wstawiamy w równania (544) i (545) skąd po wyznaczeniu bardzo prostych całek określonych znajdujemy:

$$H = \frac{ql^2}{8f} \cdot \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{r^2}{f^2}}$$

$$M_A = - \frac{ql^2}{12} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{r^2}{f^2}} \right)$$

gdzie r oznacza promień bezwładności przekroju poprzecznego łuku.

W razie gdyby omówiony łuk był obciążony zapomocą jednej tylko siły skupionej P , zaczepionej w odległości a od lewej podpory, wówczas mielibyśmy, że w przekrojach, leżących na lewo od punktu zaczepienia siły P

$$\mathfrak{M} = 0$$

a w przekrojach położonych na prawo od tego punktu

$$\mathfrak{M} = P(x - a)$$

Dalsze obliczenie odbywałoby się według tego samego schematu, co dla łuku obciążonego równomiernie, musielibyśmy tu jednak korzystać ze wszystkich trzech równań (544) — (546), gdyż obciążenie nie byłoby symetrycznem.

Zauważyć należy, że wpływ sił podłużnych na odkształcenia łuków a więc i na wielkości statycznie niewyznaczalne jest większy niż w ramach. Tłómaczy się to tem, że łuki mają naogół kształt zbliżony do tego typu ramy, dla której wpływ sił podłużnych jest prawie największy (por. XII, rys. 284) i dlatego, że długość osi łuku jest tu większa, niż w ramie wspomnianego typu i odpowiedniej wyniosłości.

6. Łuki dwuprzegubowe, łuki ciągłe i pierścienie.

Poza łukami bezprzegubowymi z pośród konstrukcyj łukowych statycznie niewyznaczalnych miewamy najczęściej do czynienia z łukami dwu-

przegubowemi, z łukami ciągłymi i z zamkniętymi w formie pierścienia prętami zakrzywionymi.

Łuki dwuprzegubowe są układami o jednej wielkości statycznie niewyznaczalnej, za którą przyjmujemy najczęściej parcie poziome łuku.

Pionowe składowe reakcyj dwóch podpór łuku dwuprzegubowego wyznaczamy w sposób analogiczny do stosowanego przy obliczeniu belek w dwóch punktach swobodnie podpartych (por. § 1 niniejszego rozdziału).

W zastosowaniu do łuku dwuprzegubowego wzór (501):

$$M_a = M_A + R_A x - Hy - \mathfrak{M}_a$$

przybiera postać następującą (vid. np. rys. 288):

$$M_a = M_{0a} - Hy \quad (564)$$

gdzie

$$M_{0a} = R_A \cdot x - \mathfrak{M}_a$$

oznacza moment zginający w danym punkcie łuku, obliczony, jak dla belki prostej.

Siła podłużna w łuku dwuprzegubowym będzie wyrażała się tak samo, jak w łuku bezprzegubowym, zapomocą wzoru:

$$N_a = R_A \cos \varphi - H \sin \varphi - \mathfrak{T}_a \quad (564')$$

Dla wyznaczenia jedynej w danym wypadku wielkości statycznie niewyznaczalnej H uciekamy się tu do równania:

$$u_B = 0$$

w którym u_B otrzymujemy ze wzoru (535):

$$u = - \int_0^s \Delta ds \cos \varphi - \int_0^s (b - y) \Delta dy \pm \int_0^l \kappa t dx - \omega_0 \cdot b$$

zastosowanego do prawej podpory łuku B , czyli dla $u = u_B$.

W tym wypadku $b = 0$, a więc

$$u_B = \int_0^s y \Delta d\varphi - \int_0^s \Delta ds \cos \varphi \pm \int_0^l \kappa t dx = 0$$

Wprowadzając tu:

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds \quad \Delta ds = \frac{N}{EA} ds$$

oraz wartości M_α i N_α ze wzorów (564) i (564'), znajdujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{M_{0\alpha} y}{EJ} ds - H \int_0^s \frac{y^2 ds}{EJ} - R_A \int_0^s \frac{\sin \varphi \cos \varphi ds}{EA} - \\ - H \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi ds}{EA} + \int_0^s \frac{\mathfrak{N} ds}{EA} \pm \int_0^l t \kappa dx = 0 \end{aligned} \quad (565)$$

W razie łuku o małej wyniosłości zakładamy, że $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ i $\mathfrak{N} = \Sigma P \sin \varphi = 0$. Stąd:

$$\int_0^s \frac{M_{0\alpha} y}{J} ds - H \int_0^s \frac{y^2 ds}{J} - H \int_0^s \frac{ds}{A} \pm \int_0^l E \kappa t dx = 0 \quad (566)$$

Wzór ten odniesiony jest do osi współrzędnych, mających początek na lewej podporze łuku A .

Z równania (566) otrzymujemy:

$$H = \frac{\int_0^s \frac{M_{0\alpha} y ds}{J} \pm E \kappa t l}{\int_0^s \frac{y^2 ds}{J} + \int_0^s \frac{ds}{A}} \quad (567)$$

Całki zastępujemy tu w ogólnym wypadku przez odpowiednie sumy w ten sam sposób, jak w wypadku łuku bezprzegubowego.

O ile podpory łuku dwuprzegubowego połączone są ze sobą rozciągliwym ścięgnem, to w równaniu (566) należy wstawić, zamiast zera, wielkość $\Delta l = \frac{Hl}{E_1 A_1}$ wydłużenia ścięgna, gdzie E_1 i A_1 oznaczają odpowiednio współczynnik sprężystości i pole przekroju poprzecznego ścięgna. Wówczas siłę H otrzymamy z równania:

$$u_B = \Delta l$$

Obliczenie kąta ω_0 obrotu lewego przekroju przegubowego otrzymujemy w ten sposób, iż odrzucamy podporę B (rys. 306), zaś łuk dwuprze-

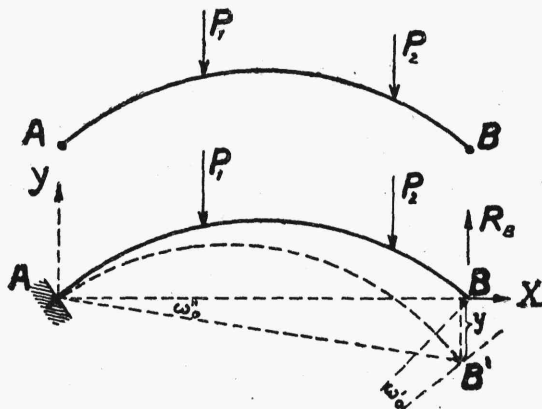
gubowy uważamy za utwierdzony w przekroju A . (Przyrost kąta nachylenia przekrojów A i B oznaczamy przez ω_0'). Jeżeli przez y_B oznaczymy

pionowe przesunięcie punktu B łuku, wówczas kąt

$$\omega_0'' = \frac{y_B}{l} \text{ będzie kątem,}$$

na który obrócić należy cały łuk, aby przegub B zajął swoje poprzednie miejsce. Wobec tego poszukiwany kąt ω_0 będzie się równał:

$$\omega_0 = \omega_0''$$



Rys. 306.

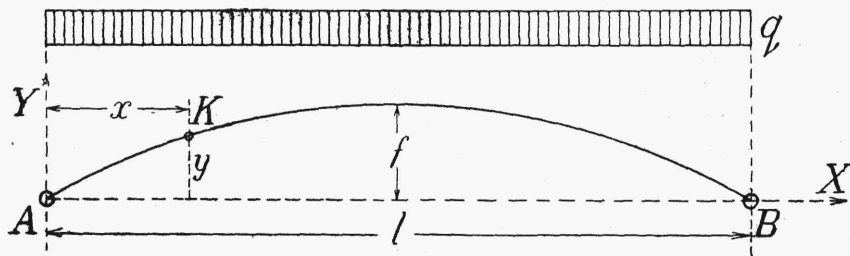
W przypadku małego wyniosłego dwuprzegubowego

łuku parabolicznego i przy obciążeniu równomiernym mamy, że

$$M_{0\alpha} = \frac{q}{2}x(l-x)$$

Postępując tu w sposób analogiczny do odpowiedniego zadania dla łuku bezprzegubowego, dochodzimy do parcia poziomego równego:

$$H = \frac{ql^2}{8f}$$



Rys. 307.

Jako drugi przykład zastosowania wzoru (567) podamy obliczenie przegubowej ramy prostokątnej, obciążonej w sposób ciągły i równomierny, a przedstawiony na rys. 271.

Przyjmujemy tu, że $h = l$, że $J_b = J_s$ i że siły podłużne w ramie nie wpływają na wielkość parcia poziomego, wobec czego wzór (567) przybiera postać następującą:

$$H = \frac{\int_0^s M_{o\alpha} \cdot y ds}{\int_0^s y^2 ds}$$

W danym wypadku dla odcinka ramy BC (belki)

$$M_{o\alpha} = \frac{qx}{2}(l - x)$$

a dla odcinków AB i CD (słupów) $M_{o\alpha} = 0$.

Ponieważ różniczka ds równa się dla belki dx , a dla słupów dy , więc mamy że

$$\int_0^s M_{o\alpha} ds = \int_0^s \frac{ql}{2}(l - x)y dx = \int_0^l \frac{ql}{2}(l - x)l dx = \frac{ql^4}{12}$$

$$\int_0^s y^2 ds = 2 \int_0^l y^2 dy + l \cdot l^2 = \frac{5}{3} l^3$$

Stąd otrzymujemy:

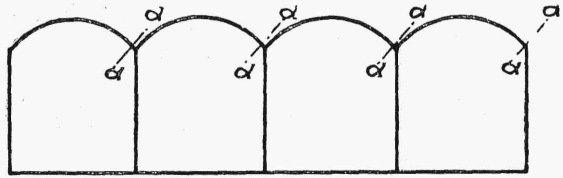
$$H = \frac{\frac{1}{12} ql^4}{\frac{5}{3} ql^3} = \frac{1}{20} ql$$

co odpowiada wzorowi (456) z rozdz. XII,4 przy $k = 1$ i $h = l$.

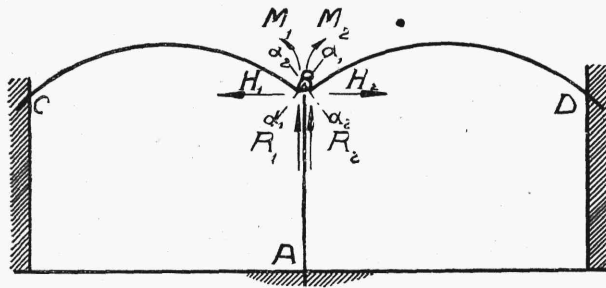
Ciągłymi nazywamy łuki, przedstawione w schemacie na rys. 308. Ich cechą charakterystyczną jest to, że słupy, podtrzymujące łuki, odkształcają się wraz z temi łukami.

Rozważmy najprostszy wypadek łuków ciągłych.

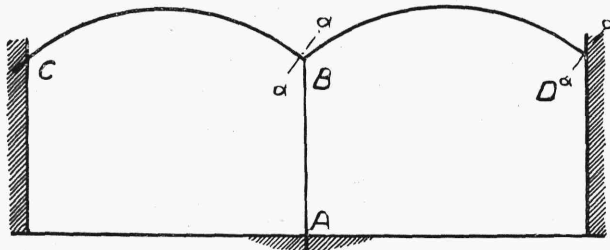
Bierzemy, mianowicie, dwa łuki, podparte każdy z jednej strony na słupie, z drugiej na przyczółku. Schemat układu przedstawiony jest na rysunku 309 i 310. Robimy dwa przekroje normalne $\alpha_1\alpha_1$ i $\alpha_2\alpha_2$, zapomocą których odcinamy słup AB od łuków BC i BD . Wzajemne oddziaływanie na siebie łuku BC i słupa wyrażamy przez moment M_1 i siły H_1 i R_1 , zaś wzajemne oddziaływanie na siebie łuku BD i słupa przez moment M_2 i siły H_2 i R_2 . W ten sposób mamy tu do wyznaczenia sześć wielkości statycznie niewyznaczalnych. Przesunięcia poziome u_1 i pionowe v_1 końca α_1 łuku BC oraz obrót ω_1 przekroju $\alpha_1\alpha_1$, wywołane odkształceniem łuku pod działaniem sił



Rys. 308.



Rys. 309.



Rys. 310.

zewnętrznych oraz sił H_1 , R_1 i momentu M_1 , obliczamy tu, jak dla układu statycznie wyznaczalnego, mianowicie, jak dla łuku w jednym końcu (C) utwierdzonego, a w drugim (α_1) swobodnego, według wzorów (535), (536) i (530),

W podobny sposób obliczamy również i przesunięcia u_2 , v_2 i obrót ω_2 dla końca α_2 łuku BD .

Słup AB znajduje się pod działaniem siły poziomej $H = H_1 - H_2$ siły pionowej ściskającej $R = R_1 + R_2$ oraz momentu $M = M_1 - M_2$, zaczepionego do końca B słupa. Pod działaniem tych sił słup doznaje następujących odkształceń:

Przesunięcie poziome końca B słupa równa się:

$$u = \frac{(H_1 - H_2) h^3}{3 EJ} + \frac{(M_1 - M_2) h^2}{2 EJ} + \frac{(R_1 + R_2) \xi h^2}{2 EJ}$$

gdzie ξ oznacza mimośród siły ściskającej słup t. j. siły $R = R_1 + R_2$.

Przesunięcie pionowe równa się skróceniu słupa:

$$v = \frac{(R_1 + R_2) h}{EA}$$

Obrót końcowego przekroju słupa wynosi:

$$\omega = \frac{(H_1 - H_2) h^2}{2 EJ} + \frac{(M_1 - M_2) h}{EJ} + \frac{(R_1 + R_2) \xi h}{EJ}$$

Wobec tego, że w punkcie B nie przestają się jednak łączyć ze sobą oba łuki z podpierającym je słupem, musimy tu mieć 6 następujących zależności:

$$\begin{aligned} u_1 &= u & u_2 &= u \\ v_1 &= v & v_2 &= v \\ \omega_1 &= \omega & \omega_2 &= \omega \end{aligned} \quad (568)$$

Na podstawie tych równań wyznaczamy 6 niewiadomych wielkości statycznie niewyznaczalnych R_1 , H_1 , M_1 , R_2 , H_2 , M_2 .

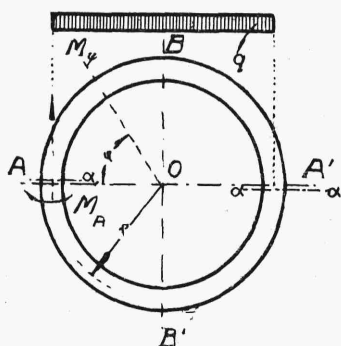
Zadanie, o które chodzi, moglibyśmy również rozwiązać, robiąc przekrój α_1 , tak jak wyżej, zaś przekrój α_2 w punkcie D (rys. 310).

Wówczas, zamiast równań (568), otrzymalibyśmy równania następujące:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_B & u_D &= 0 \\ v_1 &= v_B & v_D &= 0 \\ \omega_1 &= \omega_B & \omega_D &= 0 \end{aligned} \quad (569)$$

z których wielkości u_B v_B ω_B dotyczą punktu B łuku ABD , liczonego wraz ze słupem. Ten schemat obliczenia daje się zastosować i w wypadku dowolnej liczby kolejnych łuków (rys. 308).

W obliczeniu kanałów rurowych z betonu o przekroju pierścieniowym możemy uważać, z pewnem przybliżeniem, że kanał jest obciążony tylko siłami pionowymi rozłożonemi równomiernie na powierzchni rzutu poziomego kanału, a reakcja podłoża na którym opiera się kanał równa się jego obciążeniu pionowemu (rys. 311).



Rys. 311.

Wogóle pierścień obciążony w sposób dowolny jest układem trzykrotnie statycznie niewyznaczalnym. Gdybyśmy zrobili przekrój $\alpha\alpha$ i uważali, że w przekroju tym koło zostało utwierdzone, wówczas wzajemne oddziaływanie na siebie rozdzielonych przekrojem $\alpha\alpha$ części łuku musielibyśmy zastąpić przez siłę styczną do przekroju, siłę poprzeczną i moment zginający, czyli mielibyśmy do wyznaczenia trzy wielkości statycznie niewyznaczalne.

W danym wypadku szczególnym każda część koła AB znajduje się w warunkach jednakowych. Każdą z ćwiartek AB możemy uważać mianowicie za pręt zakrzywiony, podobny do przedstawionego na rys. 299 t. j. utwierdzone w przekroju B i obciążony w przekroju $A\alpha_1$ przez siłę $R_A = qr$ (vid. rys.) i przez niewiadomy moment M_A . Siła H równa się tu zeru ze względu na symetrię układu. W ten sposób mamy więc do wyznaczenia jedną tylko wielkość statycznie niewyznaczalną, M_A . Wielkość tę obliczamy ze wzoru (541), pomijając siły podłużne:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta d\varphi = 0$$

O ile przez M_φ oznaczymy moment w przekroju pierścienia nachylnym pod kątem φ względem poziomu, to będziemy mieli, że

$$M_{\varphi} = M_A + qr^2(1 - \cos \varphi) - \\ - \frac{qr^2}{2}(1 - \cos \varphi)^2 = M_A + \frac{qr^2}{2}(1 - \cos^2 \varphi) \quad (570)$$

Dla przyrostu $\Delta d\varphi$ przyjmujemy przybliżony wzór:

$$\Delta d\varphi = \frac{M_{\varphi}}{EJ} ds$$

gdyż stosunek grubości pierścienia do promienia może być tu uważany za mały.

Wstawiając tu zamiast M_{φ} jego wartość, dochodzimy do wzoru następującego:

$$\int_0^{\pi} \left[M_A + \frac{qr^2}{2}(1 - \cos^2 \varphi) \right] d\varphi = 0$$

po którego zcałkowaniu otrzymujemy:

$$M_A = -\frac{qr^2}{4}$$

Moment zginający w zworniku otrzymujemy ze wzoru (570); równa się on:

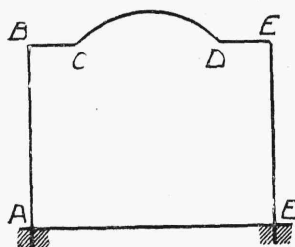
$$M_B = \frac{qr^2}{4}$$

Przy próbach rur betonowych rury te obciążamy w sposób skupiony siłą P . Droga rozumowania analogicznego do poprzedniego dochodzimy tu do wzorów:

$$M_A = -0,182 Pr \quad M_B = +0,318 Pr$$

Z zadaniem analogicznym do tego ostatniego mamy do czynienia przy obliczeniu ogniów pierścieniowych łańcucha, tylko że w tym wypadku siła P działa w kierunku nazewnątrż pierścienia.

Obliczenie łuku jedno-przegubowego odbywa się w ten sposób, że rozpatrujemy oddzielnie odkształcenie każdej z jego obydwóch części rozdzielonych przegubem. Obliczamy więc dla każdej z tych części pionowe (v_1 i v_2) i poziome (u_1 i u_2) przesunięcie przegubu, jako funkcję wielkości statycznie niewyznaczalnych R_A i H , poczem ustawiamy równania $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, z których wymienione wielkości wyznaczamy.



Rys. 312.

Przy obliczaniu ram, zawierających części zakrzywione (rys. 312), ogólny sposób obliczenia ram zmieniamy tylko o tyle, że przy wyznaczeniu odkształceń poszczególnych prętów ramy, dla części zakrzywionych korzystamy ze wzorów (535), (536) i (530).

Możemy tu również postąpić w ten sposób, jak to jest wskazane w przykładzie obliczenia ramy na str. 316.

7. Obliczenie największych naprężeń normalnych w łukach.

Ostatecznym celem obliczenia łuku jest obliczenie największych mogących w nim powstać naprężeń i porównanie ich z naprężeniami dopuszczalnymi. Do wyznaczenia naprężeń, przed ustaleniem ostatecznych wymiarów łuku musimy rozporządzać chociażby przybliżonemi jego wymiarami. Wymiary te otrzymujemy zwykle ze wzorów opartych na statystyce łuków wykonanych (wzory empiryczne). Dla łuków kamiennych i betonowych korzystać tu możemy np. z następującego wzoru Séjourné'go ¹⁾ dla grubości łuków mostowych w zworniku (w metrach):

$$h_0 = \alpha(1 + \sqrt{l}) \mu$$

gdzie l oznacza rozpiętość łuku;

$\alpha = 0,15$ dla mostów drogowych,

$\alpha = 0,18$ „ „ kolejowych,

$\mu = 1$ „ łuków półkolistych,

$\mu = \frac{4}{3 + 2 \frac{f}{l}}$ dla łuków o małej wyniosłości.

¹⁾ P. Séjourné, „Grandes voûtes“ III, 1913, str. 343.