

to otrzymujemy tu zamiast (205) wzór

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{T}{J} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (206)$$

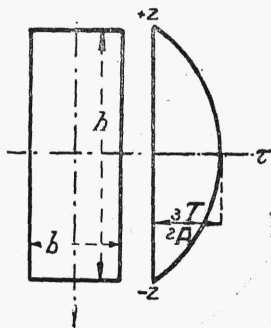
co daje przy $z = 0$:

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A} \quad (206')$$

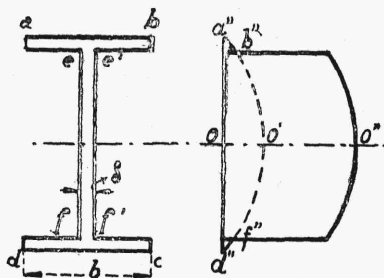
Wzory (206) i (206') wskazują na to, że wzdłuż wysokości danego przekroju belki naprężenia styczne zmieniają się według paraboli, dochodząc do największej swej wartości na osi obojętnej przekroju (rys. 136).

Dla przekrojów kolistych największe naprężenie styczne ma miejsce również na osi obojętnej i równa się $\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A}$.

W razie przekroju dwuteowego (rys. 137) wykreślamy przedewszystkiem krzywą naprężeń stycznych $a''b''o''f''d''$ tak, jak dla prostokąta $abcd$, przy czem części $a''b''$ i $f''d''$ tej krzywej odpowiadać będą rozkładowi naprężeń w stopkach ab i cd .



Rys. 136.



Rys. 137.

W dalszym ciągu ustawiamy wzór dla naprężeń stycznych w ściance $ee''f''f$:

$$\tau = \frac{TS}{\delta J} = \frac{T}{\delta J} \left[\frac{b h}{2} \cdot \frac{h}{4} - \frac{(b - \delta)(h - 2\delta_1)}{2} \cdot \frac{h - 2\delta_1}{4} - \delta \cdot z \cdot \frac{z}{2} \right] \quad (207)$$

gdzie δ i δ_1 oznaczają odpowiednio grubości ścianki i stopki.

Ostatecznie dla naprężeń stycznych w belce dwuteowej otrzymujemy wykres $a''b''o''f''d''$.

Naprężenia wypadkowe powstałe z geometrycznego dodawania do siebie naprężeń stycznych i normalnych w danym punkcie belki zginanej (naprężenia ukośne) obliczone są w rozdz. VIII, 2.

5. Równanie odkształconej i jego całkowanie.

Obliczenie ugięć, czyli pionowych przesunięć poszczególnych punktów osi belki pod działaniem sił zewnętrznych, albo ma na celu pośred-

nie sprawdzenie wytrzymałości konstrukcji, albo też służy, jako środek do wyznaczenia sił, działających w układach statycznie niewyznaczalnych.

Wyznaczenie ugięć odbywa się na podstawie równania (por. § 1 niniejszego rozdziału):

$$\frac{EJ}{\rho} = M \quad (208)$$

w którym M i ρ wyobrażamy sobie, jako funkcje współrzędnych.

O ile $M = \text{const}$, to i $\rho = \text{const}$, czyli że pręt wygina się po dług krzywej kołistej. Wypadek wygięcia kołistego ma miejsce np. w belce na dwóch podporach, na których działają równe a odwrotnie skierowane momenty (rys. 138); jest to tak zwane wygięcie czyste, gdyż siły poprzeczne równe tu są zeru (por. § 1 niniejszego rozdz.).



rys. 138.

Przy rozważaniu wszystkich innych wypadków wyginania się belek musimy przedstawić promień ρ , jako funkcję współrzędnych (rys. 139), czyli musimy równaniu (208) nadać formę następującą:

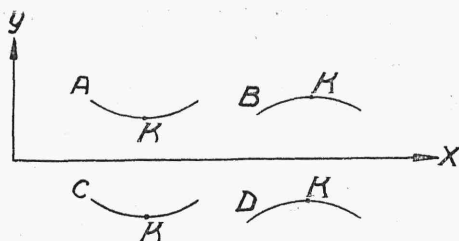
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm \frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EJ} \quad (209)$$

Wobec trudności całkowania równania odkształconej w podanej formie, zwykle uciekamy się do jego postaci uproszczonej:

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad (210)$$

dającej dostatecznie ściśle rozwiązania w większości zagadnień praktycznych, w których ugięcia y są małe, a więc i pochodne y' małe w stosunku do 1.

Aby po zcałkowaniu równania (210) wzór, otrzymany dla y , wskazał właściwe położenie odkształconej, trzeba, aby obie części równania (210) miały te same znaki algebraiczne. Sprawdzenie znaków musi być wykonane tylko dla jednego jakiegokolwiek punktu, w którym znane jest położenie wypukłej strony odkształconej.



Rys. 139.

Mamy więc np. układ współrzędnych, przedstawiony na rys. 139, oraz szereg krzywych o zaznaczonej w punkcie K wypukłości lub wklęsłości względem osi X -ów.

O kierunku wypukłości lub wklęsłości w danym punkcie decyduje, jak wiadomo, znak iloczynu yy'' , który jest dodatni dla krzywej wypukłej względem osi X -ów i ujemny w przeciwnym razie.

Mamy stąd zestawienie następujące:

Dla wypadku	A:	$yy'' > 0$,	$y > 0$,	$y'' > 0$,	$M > 0$,	
"	"	$yy'' < 0$,	$y > 0$,	$y'' < 0$,	$M < 0$,	(211)
"	"	$yy'' < 0$,	$y < 0$,	$y'' > 0$,	$M > 0$,	
"	"	$yy'' > 0$,	$y < 0$,	$y'' < 0$,	$M < 0$,	

Za moment dodatni przyjmujemy, jak poprzednio, moment obracający lewą odciętą część pręta na prawo (kierunek wskazówki normalnego zegara). Moment ten wywołuje rodzaj odkształcenia, odpowiadający wypadkom A i C, czyli wykrzywienie zwrócone wypukłością do dołu. Uważając, iż moment M w równaniu (210) tak jest właśnie rozumiany, stawiamy tu przed M w wypadku A i C znak $+$ (więcej), zaś w wypadku B i D znak $-$ (mniej).

W razie skierowania na rys. 139 osi OY ku dołowi omówione wypadki A i C zajęłyby w zestawieniu miejsca wypadków B i D i odwrotnie.

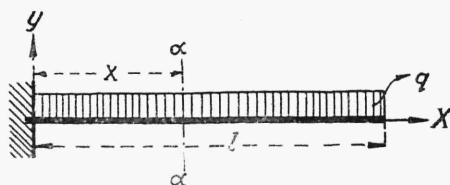
Odpowiednio do powyższej reguły znaków, będziemy uważali za dodatnie kąty nachylenia dodatniego kierunku stycznej do osi odkształconej z dodatnim kierunkiem osi X -ów, o ile dodatni kierunek stycznej zawarty jest między dodatnimi kierunkami obydwóch osi współrzędnych (por. nast. odcinek). Należy zwrócić uwagę na to, iż właściwe znakowanie kątów nachylenia stycznych do odkształconej względem osi X -ów, inaczej mówiąc, kątów nachylenia poszczególnych przekrojów belki względem osi X -ów, posiada szczególnie ważne znaczenie przy obliczaniu belek statycznie niewyznaczalnych (rozdz. XI).

Mamy belkę utwierdzoną w jednym końcu, swobodną w drugim i obciążoną w sposób ciągły i równomierny (rys. 140).

Pod działaniem sił skierowanych ku dołowi belka wygnie się również w tym kierunku, przyczem wypukłością będzie zwrócona w stronę osi X -ów

Będziemy tu więc mieli: $y < 0$ i $yy'' > 0$, skąd y'' musi być < 0 , a więc i przed momentem powinniśmy mieć znak — (mniej).

Aby wyznaczyć moment M w danym wypadku, korzystamy ze sposobów obliczenia momentów zginających, opisanych w rozdz. IV, pamiętając przytem, że obciążenie belki wywołuje w miejscu utwierdzenia moment $-\frac{ql^2}{2}$ (ob-



Rys. 140.

racający część belki położoną na lewo od pewnego przekroju w kierunku na lewo) oraz reakcję ql , dającą względem danego przekroju moment dodatni qlx . Dla uproszczenia rozumowania możemy tu wyobrazić się stojącymi za płaszczyzną rysunku. Tą lub ową drogą dochodzimy do równania następującego:

$$EJ \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M = -\frac{q(l-x)^2}{2} \quad (212)$$

gdzie q oznacza obciążenie jednostkowe belki.

Całkując równanie (212), otrzymujemy:

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{q}{2} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + C$$

Pochodna $\frac{dy}{dx}$ oznacza tg kąta nachylenia względem osi X -ów stycznej

do odkształconej, czyli że $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \approx \varphi$. Wobec tego mamy, że

przy $x=0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, skąd $C=0$.

Po drugim całkowaniu otrzymujemy dla odkształconej równanie następujące:

$$EJ y = -\frac{q}{2} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + C'$$

Wobec tego, że, ze względu na utwierdzenie belki, przy $x=0, y=0$, musi i stała całkowana C' równać się 0. Z powyższych wzorów otrzymujemy, iż na swobodnym końcu belki (t.j. przy $x=l$)

$$y_l = - \frac{q l^4}{8 E J} \quad , \quad \left[\frac{dy}{dx} \right]_l = \varphi_l = - \frac{q l^3}{6 E J} \quad (212')$$

W razie obciążenia belki, przedstawionego na rys. 141 (str. 125), równanie (210) przybiera postać następującą:

$$E J \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{q l}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3} \quad (213)$$

Całkując równanie (213), otrzymujemy, że

$$E J y = - \frac{q l}{2} \cdot \frac{x^3}{60 l^2} + C x + C'$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków:

$$\text{przy } x = l \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{przy } x = l \quad y = 0$$

wynika z tego, że

$$C = \frac{q l}{2} \cdot \frac{l^2}{12} \quad ; \quad C' = \frac{q l^4}{30}$$

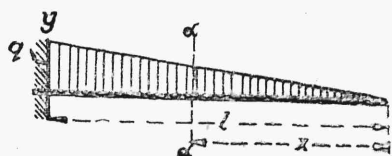
$$y = - \frac{q l^4}{30 E J} \quad (213)$$

Gdybyśmy obciążyli belkę równomiernie (obciążenie jednostkowe q), wówczas mielibyśmy, według pierwszego ze wzorów (212'), że

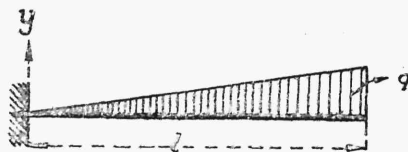
$$y = - \frac{q l^4}{8 E J}$$

Różnica dwóch ostatnich ugięć da nam ugięcie belki przy obciążeniu wskazanem na rys. 142:

$$y = - \frac{11}{120} \cdot \frac{q l^4}{E J} \quad (214)$$



Rys. 141.



Rys. 142.

W wypadku, przedstawionym na rys. 143, t.j. w wypadku belki w jednym końcu utwierdzonej, a na drugim obciążonej siłą skupioną, znajdujemy w sposób podobny do poprzedniego, że

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -P(l - x)$$

skąd:

$$y_l = -\frac{Pl^3}{3EJ} \quad \text{i} \quad \varphi_l = -\frac{Pl^2}{2EJ} \quad (215)$$

W wypadku przedstawionym na rys. 144 mamy, że:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$$

skąd:

$$y_l = -\frac{Ml^2}{2EJ} \quad \text{i} \quad \varphi_l = -\frac{Ml}{EJ} \quad (216)$$



Rys. 143.



Rys. 144.

W razie ciągłego i równomiernego obciążenia belki na dwóch podporach równanie różniczkowe odkształconej przybiera w układzie współrzędnych, przyjętym według rys. 139, postać następującą (tu $y < 0$, $yy'' < 0$, $y'' > 0$):

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{qx}{2}(l - x)$$

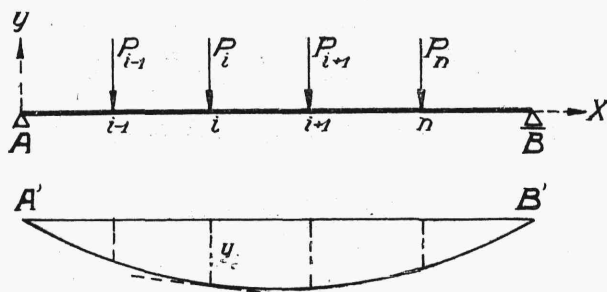
Stałe całkowania wyznaczamy w tym wypadku z warunku, że na końcach belki (t.j. przy $x = 0$ i $x = l$) ugięcia równe są zeru i że w środku belki

styczna do odkształconej jest równoległa do osi X -ów. Otrzymujemy w ten sposób, że

$$EJy = -\frac{ql^3}{24EJ}x\left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)$$

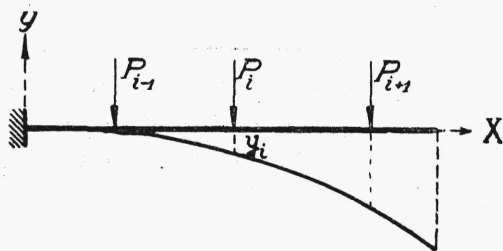
skąd wynika, że ugięcie w środku belki (t.j. przy $x = \frac{l}{2}$) będzie równe:

$$y_{sr} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \quad (217)$$



Rys. 145,

O ile do belki zaczepimy szereg ciężarów skupionych, wówczas odkształcona zostanie podzielona na szereg gałęzi, odpowiadających odcinkom belki między poszczególnymi ciężarami i wyrażających się zapomocą równań różnych dla każdej gałęzi (rys. 145 i 146).



Rys. 146.

Oznaczamy przez M_1, M_2, \dots, M_i funkcje odciętej x , wyrażające momenty zginające w poszczególnych odcinkach belki,

Równanie (210) przybiera więc na odcinkach AP_1 , P_1P_2 i t. d. formy następujące:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^2y}{dx^2} &= \pm M_1 \\ EJ \frac{d^2y}{dx^2} &= \pm M_2 \\ &\dots \dots \dots \\ EJ \frac{d^2y}{dx^2} &= \pm M_i \end{aligned} \quad (218)$$

Wobec przyjętych na rys. 145 kierunków osi współrzędnych, przy momentach M mamy tu znak $+$ ($yy'' < 0$, $y < 0$, $y'' > 0$), natomiast dla rys. 146 należy przyjąć przy momentach znak $-$ (mniej).

Całkując dwukrotnie równania (218), otrzymujemy

$$\begin{aligned} EJ \frac{dy}{dx} &= \int M_1 dx + C_1 \\ EJ \frac{dy}{dx} &= \int M_2 dx + C_2 \\ &\dots \dots \dots \\ EJ \frac{dy}{dx} &= \int M_i dx + C_i \end{aligned} \quad (218')$$

oraz:

$$\begin{aligned} EJ y &= \int \int M_1 dx + \int C_1 dx + C'_1 \\ EJ y &= \int \int M_2 dx + \int C_2 dx + C'_2 \\ &\dots \dots \dots \\ EJ y &= \int \int M_i dx + \int C_i dx + C'_i \end{aligned} \quad (218'')$$

Aby odkształcona belki nie miała nigdzie załamania i stanowiła jedną ciągłą krzywą, potrzeba, aby pod każdą z sił P sąsiednie części odkształconej miały wspólną styczną i równe rzędne. Warunek ten daje nam możliwość wyznaczenia stałych całkowania we wzorach (218') i (218'').

Bierzemy punkt i zaczepienia siły P_i (odcinka x_i) i obliczamy odpowiadającą mu rzędną dwóch gałęzi odkształconej na sąsiednich odcinkach $P_{i-1} P_i$ oraz $P_i P_{i+1}$, a również kąty nachylenia względem osi X -ów stycznych do tych samych krzywych i w tym samym punkcie (rys. 145 i 146).

Rzędną odcinka $P_{i-1} P_i$ odkształconej w punkcie i oznaczamy przez $y_{i(i-1)}$, a odpowiedni kąt nachylenia stycznej przez $y'_{i(i-1)}$; te same wielkości dla odcinka $P_i P_{i+1}$ oznaczamy odpowiednio przez $y_{i(i+1)}$ oraz $y'_{i(i+1)}$.

Możemy więc ustawić równania typu:

$$y_{i(i-1)} = y_{i(i+1)} \quad (219)$$

$$y'_{i(i-1)} = y'_{i(i+1)}$$

których liczba, przy liczbie ciężarów n na belce, będzie równa $2n$.

Ponieważ liczba gałęzi odkształconej w belce na 2 podporach równa się $n+1$, więc tyleż będziemy mieli równań (218), czyli że ogólna liczba stałych całkowania wyniesie tu $2n+2$. Brakujące dwa równania do wyznaczenia wszystkich stałych da nam dla wypadku przedstawionego na rys. 145 warunek, iż rzędne odkształconej na obydwóch podporach równe są zeru, czyli że

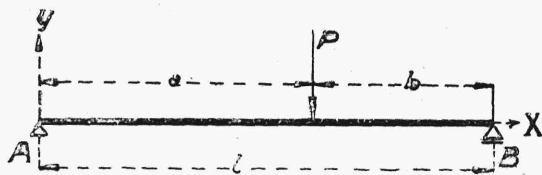
$$y_{o(1)} = 0, \quad y_{n+1(n)} = 0 \quad (220)$$

W razie belki utwierdzonej (rys. 146) rozporządzamy tylko liczbą $2n-2$ równań (219), potrzebujemy zaś wyznaczyć $2n$ stałe całkowania. Brakujące 2 równania da nam warunek, że w utwierdzonym końcu belki styczna do odkształconej jest pozioma (t. j. równoległa do osi X -ów), a ugięcie równe zeru, czyli że:

$$y_{o(1)} = 0, \quad y'_{o(1)} = 0 \quad (221)$$

Powyższy sposób postępowania zachowałby swą moc i w tym wypadku, gdyby do poszczególnych punktów belki zostały, oprócz sił pionowych, zaczepione również i pary sił (momenty) oraz obciążenie ciągłe.

Bierzemy belkę na dwóch podporach, obciążoną jedną pionową siłą P , zaczepioną w odległości a od lewej i b od prawej podpory (rys. 147).



Rys. 147.

Stosujemy tu równanie (210) do odcinków AP i PB belki; mamy więc:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Pb}{l} \cdot x \quad (222)$$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pa}{l} \cdot (l-x)$$

Całkując każde z tych równań dwukrotnie, otrzymujemy:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (223)$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{Pa}{l} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_2$$

$$EJ y = \frac{Pb}{l} \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_1' \quad (224)$$

$$EJ y = \frac{Pa}{l} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2 x + C_2'$$

Aby wyznaczyć 4 stałe całkowania, ustawiamy tu 2 równania (220) i 2 równania typu (219). Otrzymujemy:

$$C_1' = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{Pa}{l} \left[\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} \right] + C_2 l + C_2' &= \frac{P a l^2}{3} + C_2 l + C_2' = 0 \\ \frac{Pa}{l} \left[\frac{l}{2} a^2 - \frac{a^3}{6} \right] + C_2 a + C_2' &= \frac{Pb}{l} \cdot \frac{a^3}{6} + C_1 a \quad (225) \\ \frac{Pa}{l} \left[la - \frac{a^2}{2} \right] + C_2 &= \frac{Pb}{l} \cdot \frac{a^2}{2} + C_1 \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (225), otrzymujemy:

$$C_1 = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} \quad (226)$$

Równanie osi odkształconej w części AP otrzymuje postać następującą:

$$EJ y = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{Pb(l^2 - b^2)x}{6l} = \frac{Pb}{6l} (x^2 + b^2 - l^2) \quad (227)$$

Obliczywszy w dalszym ciągu na podstawie równań (225) wielkości C_2 i C_2' , możemy ustawić odpowiednie równanie i dla odkształconej odcinka PB . Z równania (227) otrzymujemy dla $x = a$, t. j. dla punktu P następujące ugięcie:

$$y = - \frac{Pa^2 b^2}{3EJl} \quad (228)$$

Przy $a = b = \frac{l}{2}$, mamy, że

$$y_{sr} = - \frac{Pl^3}{48EJ} \quad (229)$$

Kąt nachylenia stycznej w tym punkcie względem osi X -ów jest równy zeru. Kąt nachylenia stycznej w punktach $x = 0$ i $x = l$ wyniesie

$$\varphi_0 = y'_0 = - \frac{Pl^2}{16EJ} \quad (230) \quad \varphi_l = + \frac{Pl^2}{16EJ} \quad (230')$$

Wynika to ze wzorów (223).

Punkt największego ugięcia belki znajdujemy drogą przyrównania do zera wzoru dla y' , gdyż w tym punkcie styczna do osi odkształconej musi być równoległą do osi X -ów. Mamy więc, że

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{6EJl}(3x^2 + b^2 - l^2) = 0 \quad (231)$$

skąd

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)} \quad (231')$$

W przybliżeniu często przyjmujemy, iż największe ugięcie belki wypada w środku jej długości. Istotnie wzór (231') nawet przy $b = 0$ daje dla x wartość $x = 0,577l$, jeżeli zaś jest $b > 0$, wówczas x jeszcze mniej różni się od połowy l . Ponieważ, w dodatku, koło środka belki y bardzo wolno zmienia się w zależności od x , można więc przyjąć, nie popełniając znacznego błędu, że punkt największego ugięcia przypada w środku belki.

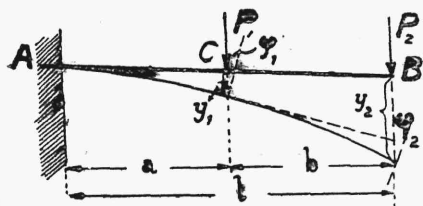
Ugięcie to znajdziemy (błąd około 2%), wstawiając do wzoru (227) $x = \frac{l}{2}$:

$$y = - \frac{Pb}{48EJ}(3l^2 - 4b^2) \quad (232)$$

W razie szeregu ciężarów na belce, ugięcia w środku belki pod działaniem poszczególnych ciężarów sumują się w myśl zasady superpozycji. Mamy tu więc, że

$$y = -\frac{1}{48 EJ} \sum P b (3l^2 - 4b^2) \quad (233)$$

gdzie P oznacza poszczególne ciężary skupione, zaś b ich odległości od prawej podpory.



Rys. 148.

Ugięcie y_2 w końcowym przekroju belki w jednym końcu utwierdzonej, a na drugim obciążonej siłą skupioną P (rys. 148) znaleźć możemy, poza rozwiązaniem ogólnym, wyrażeniem (219), jeszcze drogą rozumowania następującego.

Ugięcie y_2 w punkcie B składa się:

- 1°, z ugięcia belki w punkcie C równego y_1 ,
- 2°, z ugięcia belki w punkcie B , równego y_2 i obliczonego jedynie dla odcinka belki CB rozpatrywanego, jako belka utwierdzona w przekroju C ,
- 3°, z długości łuku równego $\varphi_1 b$ i zakreślonego względem punktu C przez odcinek belki CB wskutek nachylenia się przekroju belki w C o kąt φ_1 .

W ten sposób dochodzimy do wzoru:

$$y_2 = y_1 + \varphi_1 b + \bar{y}_2$$

w którym wielkości y_1 i φ_1 obliczone są w ten sposób, jakgdyby dotyczyły belki AC o długości a utwierdzonej w jednym końcu (A), w drugim zaś (C) obciążonej siłą P i momentem Pb .

Wzór (210) możemy z pewnemi zastrzeżeniami stosować i do belek o zmiennym momencie bezwładności J , będącym funkcją współrzędnej x .

O ile zmiany przekroju belki nie są zbyt nagłe, w takim razie wstawiamy w równanie (210), zamiast stałej wartości J , odpowiednią funkcję x i wykonyujemy całkowanie tak przekształconego równania osi belki.

Przypuśćmy teraz, że J zmienia się wzdłuż belki w sposób nieciągły w ten sposób np., że części AC , CD i DB belki AB mają kolejno momenty bezwładności równe J_1, J_2, J_3 . W tym wypadku gałęzie odkształconej na odpowiednich odcinkach belki otrzymują równania następujące:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_1}{E J_1} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_2}{E J_2} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_3}{E J_3} \quad (234)$$

gdzie M_1, M_2, M_3 oznaczają momenty zginające na poszczególnych odcinkach, przedstawione, jako funkcje x .

Po zcałkowaniu równań (234) odkształconą wyznaczymy, tak samo jak dla belki o przekroju stałym, z warunku, że w punktach C i D jej sąsiednie odcinki mają wspólne styczne i równe rzędne, oraz z warunku, że na podporach ugięcie belki równe jest 0.

Zastrzec się należy, że omówione rozwiązanie dla belki o zmiennym przekroju poprzecznym nie może być uważane za zupełnie ścisłe, gdyż równanie (210) wyprowadzone zostało dla belek o przekroju stałym; rozwiązanie to daje jednak dla celów praktycznych wyniki zadowalające.

6. Obliczenie ugięć sposobem momentów wtórnych.

Poza sposobem bezpośredniego całkowania równania odkształconej ugięcia belki mogą być obliczane jeszcze i sposobem, opartym na analogji, mającej miejsce między równaniem odkształconej (por. § 5 niniejszego rozdziału):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad (235)$$

a równaniem krzywej sznurowej (por. rozdz. II, 4):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} \quad (236)$$

Stosunki znajdujące się w prawych częściach obydwóch równań mają ten sam wymiar cm^{-1} gdyż q ma wymiar k:cm , H wymiar k , M wymiar k.cm , wreszcie EJ wymiar k.cm^2 .

Podobieństwo obydwóch równań może być wyzyskane drogą rozumowania następującego.

Jeżeli sporządzimy dla belki w pewien dowolny sposób obciążonej wielobok sznurowy, względnie krzywą sznurową, wówczas, jak wiadomo, odległości y , zawarte między tą krzywą a prostą zamykającą, pomnożone przez odległość biegunową, dadzą nam momenty zginające, czyli że w pewnym przekroju $\alpha\alpha$ belki $M_\alpha = f_1(x) = y_\alpha \cdot H$.

Z drugiej strony, rzędne, zawarte między odkształconą danej belki a jej zamykającą, w danym razie osią X -ów, dają ugięcia belki w poszczególnych przekrojach czyli $y = f(x)$.

Jeżeli dla danej belki przyjmiemy obciążenie ciągłe, zmieniające się według reguły $q = M = f_1(x)$, które będziemy nazywali obciążeniem wtórnem, i o ile za odległość biegunową przyjmiemy pewien odcinek ξ , wyrażający się w skali $\text{k.cm}^2 = s \text{ cm}$ liczbą EJ , wówczas krzywa sznurowa, sporządzona dla takiego obciążenia, da rzędne równe y_α (mierzone od zamykającej), które pomnożone przez odległość biegunową $\xi = EJ$