

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_0}{\partial y} = 0 \quad (254)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_0}{\partial x} = \gamma \quad (255)$$

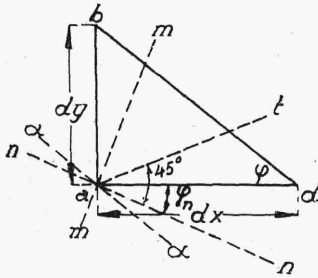
Równania te należy rozumieć w ten sposób, iż wiążą one ze sobą w dowolnym punkcie walca naprężenia normalne i styczne, równoległe do osi współrzędnych i działające na przeprowadzone przez ten punkt płaszczyzny w nieskończenie bliskim sąsiedztwie od niego. Rozwiązanie tych równań omówione jest w rozdz. XIX i XX.

Równania wiążące ze sobą naprężenia, działające na wszystkie sześć boków nieskończenie małego prostopadłościanu t.j. przedstawiające przestrzenny, czyli trójwymiarowy układ naprężeń, są omówione niżej w teorii płyt (rozdz. XX, 1).

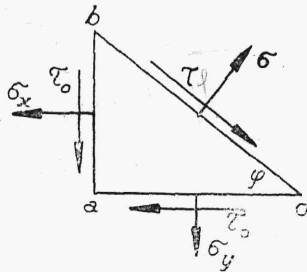
2. Równowaga graniastosłupa trójkątnego.

Gdy chodzi o naprężenia, działające na płaszczyzny nachylone względem osi współrzędnych pod kątem ostrym, lub gdy chcemy obliczyć naprężenia walca, omówionego w § 1, w okolicach obwodu (rys. 152), wówczas wychodzimy z warunków równowagi graniastosłupa trójkątnego np. graniastosłupa abd , smn lub $s'm'n'$ o długości (grubości) w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku, równej 1.

Bierzemy więc graniastosłup trójkątny abd (por. rys. 152) i ustalamy, że naprężenia, działające na płaszczyznę bd (rys. 154) będą się tylko o wielkości nieskończenie małe różniły od naprężeń, działających na płaszczyznę aa do bd równoległą (tak jak np. σ_x różniło się w zadaniu poprzednim od σ'_x); dla-



Rys. 154.



Rys. 155.

tego też uważać będziemy naprężenia działające na bd , jako naprężenia w punkcie a . Naprężenia, działające na wszystkie ściany graniastosłupa abd , uważamy za rozłożone równomiernie. Pola ścian ab i ad równe są odpowiednio dy i dx , a naprężenia działające na nie są to σ_x , σ_y i $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2$ (rys. 153).

Pole $bd.l$ oznaczamy przez dA , naprężenia normalne do płaszczyzny bd przez σ , styczne do tej płaszczyzny przez τ , kąt adb przez φ (rys. 155).

Wówczas pole $ad.l$ będzie równe $dA \cdot \cos \varphi$, a pole $ab.l$ równe $dA \cdot \sin \varphi$.

Rzuty sił, działających na graniastosiup abd , na osie współrzędnych dają nam równania następujące:

$$\Sigma X = (\sigma \sin \varphi + \tau \cos \varphi - \sigma_x \sin \varphi - \tau_o \cos \varphi) dA = 0 \quad (256)$$

$$\Sigma Y = (\sigma \cos \varphi - \tau \sin \varphi - \sigma_y \cos \varphi - \tau_o \sin \varphi) dA = 0 \quad (257)$$

Mnożymy równanie (256) przez $\sin \varphi$, a równanie (257) przez $\cos \varphi$, poczem dodajemy je do siebie. W rezultacie otrzymujemy, że

$$\sigma = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi + 2 \tau_o \sin \varphi \cos \varphi \quad (258)$$

Wobec tego, że

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

możemy nadać równaniu (258) następującą postać:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\varphi + \tau_o \sin 2\varphi \quad (259)$$

Mnożąc równanie (256) przez $\cos \varphi$, a równanie (257) przez $\sin \varphi$ i odejmując od pierwszego z nich ostatnie, otrzymujemy, że

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_o \cos 2\varphi \quad (260)$$

Naprężenie σ osiąga swej największej wartości w płaszczyźnie nn (rys. 154), której kąt nachylenia φ_n względem osi X -ów odpowiada równaniu:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \quad (261)$$

Równanie to przybiera w danym razie następującą postać:

$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + 2 \tau_o \cos 2\varphi = 0 \quad (262)$$

skąd wynika, że

$$\operatorname{tg} 2\varphi_n = \frac{2 \tau_o}{\sigma_y - \sigma_x} \quad (263)$$

Ponieważ tangens jest funkcją okresową o okresie π , otrzymamy więc z równania (263) dwie wartości dla φ_n , przyczem te wartości będą różniły się od siebie o $\frac{\pi}{2}$.

W ten sposób dochodzimy do wyznaczenia w danym punkcie a płaszczyzn największego i najmniejszego naprężenia normalnego zapomocą tangensów podwójnych kątów nachylenia tych płaszczyzn względem osi X -ów (na rys. 154 płaszczyzny nn i mm).

Obliczamy naprężenia σ , odpowiadające kątom φ_n , otrzymanym z równania (263).

Wyrażamy więc $\sin 2\varphi_n$ i $\cos 2\varphi_n$ zapomocą $\operatorname{tg} 2\varphi_n$:

$$\begin{aligned}\sin 2\varphi_n &= \pm \frac{2\tau_o}{\sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}} \\ \cos 2\varphi_n &= \pm \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}\end{aligned}\quad (264)$$

Wstawiając powyższe wartości (264) sinusów i cosinusów w równanie (259) otrzymujemy:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \quad (265)$$

Ponieważ wartości naprężenia σ , odpowiadające wzorowi (265), są pierwiastkami równania (261) i ponieważ naprężenie to, jako funkcja kąta φ , musi mieć podczas jednego obrotu koła przynajmniej jedno maximum i jedno minimum, wobec tego górny znak równania (265) odpowiadać będzie $\max \sigma$, dolny zaś $\min \sigma$.

Mamy więc, że

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}\end{aligned}\quad (265')$$

Naprężenia wyrażone zapomocą wzoru (265) nazywają się głównymi. Dwie płaszczyzny wzajemnie prostopadłe, przechodzące przez dany punkt, do których normalnie te naprężenia działają, nazywamy głównymi przekrojami w danym punkcie (rys. 154). W płaszczyznach tych naprężenia styczne są równe zero, o czem się przekonamy, wstawiając wartości $\sin 2\varphi_n$ i $\cos 2\varphi_n$ ze wzorów (264) we wzór (260) dla naprężenia τ .

Aby znaleźć położenie płaszczyzny, przechodzącej przez punkt a , w której naprężenia τ otrzymują wartość największą, rozwiązujemy równanie:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = 0 \quad (266)$$

które przybiera tu postać:

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\varphi - 2\tau_0 \sin 2\varphi = 0 \quad (267)$$

dając dla $\operatorname{tg} 2\varphi_t$, odpowiadającego kątowi φ_t nachylenia poszukiwanej płaszczyzny względem osi X -ów, wartość następującą:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_t = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_0} \quad (268)$$

Z porównania wzorów (263) i (268) wynika:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_n = - \operatorname{ctg} 2\varphi_t \quad (269)$$

skąd mamy, że

$$\operatorname{tg} 2\varphi_n = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi_t \right)$$

i że

$$\varphi_t = \varphi_n - \frac{\pi}{4}$$

to znaczy, że płaszczyzna, w której ma w danym punkcie miejsce $\max \tau$, tworzy z przekrojami głównymi kąt 45° (rys. 154, płaszczyzna at).

Na podstawie wzoru (268) obliczamy $\sin 2\varphi_t$ i $\cos 2\varphi_t$:

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_t &= \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{4\tau_0^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}} \\ \cos 2\varphi_t &= \pm \frac{2\tau_0}{\sqrt{4\tau_0^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}} \end{aligned} \quad (270)$$

a, wstawiając je w równanie (260), otrzymujemy:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \quad (271)$$

$$\tau_{\min} = -\frac{1}{2} \sqrt{4\tau_o^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

Mając na widoku wzór (271) i odejmując od siebie równania (265'), dochodzimy do zależności następującej:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (272)$$

która dla pewnego wypadku szczególnego była już wyprowadzona w rozdz. V, 2.

3. Elipsa naprężeń i wykres naprężeń Mohr'a.

Przypuśćmy, że wzory (258) i (260) zostały odniesione do układu osi współrzędnych, pokrywających się w danym punkcie z kierunkami naprężeń głównych (rys. 156, strona 149). Ponieważ naprężenie τ_o będzie tu równe zeru, więc wzory te otrzymają postać następującą:

$$\sigma = \bar{\sigma}_x \sin^2 \varphi + \bar{\sigma}_y \cos^2 \varphi \quad (273)$$

$$\tau = \frac{\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y}{2} \sin 2\varphi \quad (273')$$

gdzie $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\sigma}_y$ oznaczają naprężenia główne w danym punkcie, t. j. naprężenia σ_{\max} lub σ_{\min} , a kąt φ oznacza, jak poprzednio, kąt nachylenia względem osi X -ów płaszczyzny, na którą działa pewne naprężenie normalne σ i styczne τ .

Położenie omówionego układu osi współrzędnych względem układu osi dowolnie przyjętych określi kąt otrzymany ze wzoru (263).

Wykonamy tu wykres naprężeń wypadkowych, działających na płaszczyzny nachylone względem osi X -ów pod zmiennym kątem φ , t. j. naprężeń σ_φ (rys. 157).