

## ROZDZIAŁ III.

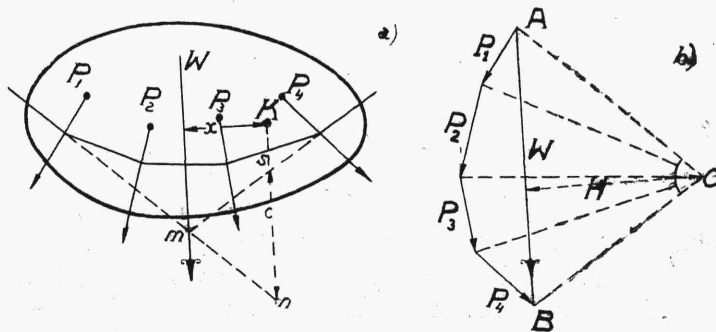
### Momenty statyczne i momenty bezwładności.

#### 1. Momenty statyczne sił i pól.

Mamy wyznaczyć wykreślnie moment układu sił  $P$  (rys. 41) względem punktu  $K$ . Ponieważ algebraiczna suma momentów sił składowych równa się momentowi wypadkowej względem tegoż punktu, więc poszukiwany moment równa się:

$$M_k = W \cdot x \quad (3)$$

gdzie  $W$  oznacza wypadkową sił  $P$ , a  $x$  odległość jej linii działania od punktu  $K$ . Wykreślamy wielobok sił i wielobok sznurowy dla dowolnego bieguna.



Rys. 41.

Przedłużamy skrajne boki wieloboku sznurowego i przeprowadzamy przez punkt  $K$  prostą równoległą do wypadkowej  $W$ . Długość odcinka tej prostej  $sn$ , zawartego między obydwoma skrajnymi bokami wieloboku sznurowego, oznaczamy przez  $c$ .

Ponieważ trójkąty  $smn$  (rys. 41 a) i  $OAB$  (rys. 41 b) są do siebie podobne, więc

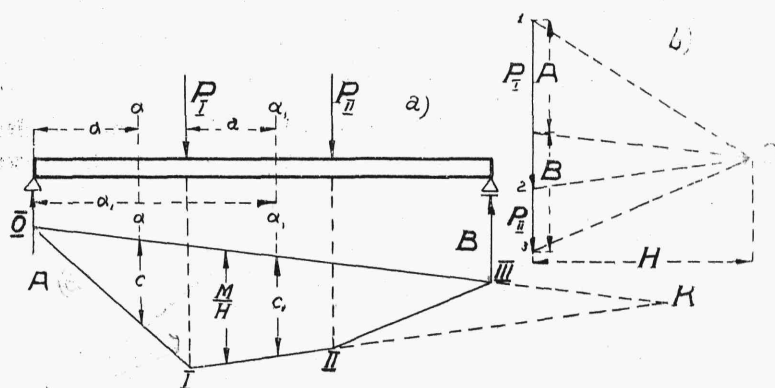
$$W.x = c.H \quad (4)$$

gdzie  $H$  oznacza odległość wektora  $W$  od bieguna  $O$  na wieloboku sił; wynika stąd, że

$$M_k = c.H \quad (5)$$

W ten sposób mamy, że moment statyczny układu sił  $P$  względem punktu  $K$  równa się odcinkowi prostej, przechodzącej przez ten punkt i równoległej do wypadkowej, zawartemu między skrajnymi bokami wieloboku sznurowego, pomnożonemu przez odległość wektora wypadkowej od bieguna, uważaną za siłę (t. j. mierzoną w tej skali, w której został wykonany wielobok sił).

Przypuśćmy dalej, że na belkę  $AB$  (rys 42) działa układ sił  $P_I$  i  $P_{II}$  prostopadłych do osi belki i że reakcje podpór równe są odpowiednio  $A$  i  $B$ . Z warunków równowagi wynika, że wielobok sznurowy powinien być zamknięty, co przedstawione jest na rys. 42a.



Rys. 42.

Moment wszystkich sił zewnętrznych, działających na belkę na lewo od danego przekroju względem jego płaszczyzny  $\alpha\alpha$ , nazywamy momentem zginającym w danym przekroju belki i oznaczamy symbolem  $M_{\alpha}$ . Na podstawie tego określenia możemy napisać, iż dla belki przedstawionej na rys. 42a momenty zginające w przekrojach  $\alpha\alpha$  i  $\alpha_1\alpha_1$  równe są odpowiednio:

$$M_{\alpha} = A.a \quad (6)$$

$$M_{\alpha_1} = A.a_1 - P_I.a \quad (7)$$

Z drugiej strony, wobec twierdzenia, wypowiedzianego wyżej

$$M_{\alpha} = c \cdot H \quad (8)$$

gdyż  $c$  przedstawia w danym razie odcinek prostej, równoległej do sił  $P$ , a więc i do ich wypadkowej, zawarty między skrajnymi bokami wieloboku sznurowego, odpowiadającego danemu układowi sił, który na lewo od przekroju  $\alpha\alpha$  sprowadza się w danym wypadku do jednej tylko siły  $A$ .

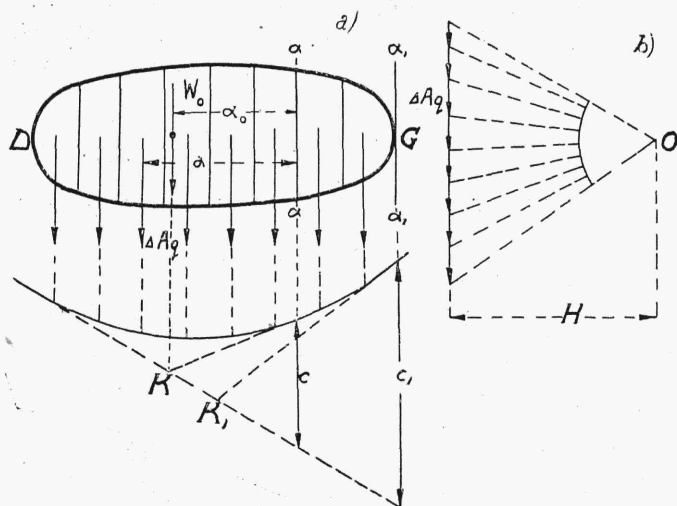
Na tej samej podstawie:

$$M_{\alpha_1} = c_1 \cdot H \quad (9)$$

gdyż w danym wypadku proste  $\overline{OK}$  i  $IK$  są skrajnymi bokami wieloboku sznurowego układu sił zaczepionych na lewo od przekroju  $\alpha_1\alpha_1$  czyli sił  $A$  i  $P_L$ .

Rozumując w ten sam sposób w dalszym ciągu, dochodzimy do wniosku że odcinki linii równoległych do  $P$ , zawarte między prostą  $OK$ , z jednej strony, a prostymi  $OI$ ,  $III$  i  $IIIII$ , z drugiej, przedstawiają wykres podzielonych przez  $H$  momentów statycznych sił, zaczepionych na lewo od pewnego ruchomego przekroju  $\alpha\alpha$ , czyli momentów zginających w tym przekroju. Przy  $H = 1$  wykres ten staje się po prostu wykresem momentów zginających dla danej belki.

Obliczamy teraz momenty statyczne sił ciężkości, działających na bryłę, ograniczoną dwiema płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny rysunku i pewną powierzchnią cylindryczną. Zadanie takie uważamy za płaskie (rys. 43).



Rys. 43.

Aby znaleźć moment statyczny ciężaru własnego części bryły na lewo od przekroju  $\alpha\alpha$ , dzielimy pole, wyobrażające bryłę na rysunku, prostymi równoległymi do  $\alpha\alpha$  na małe trapezy i zaczepiamy do ich środków ciężkości siły równe  $\Delta A q l$  gdzie  $\Delta A$  oznacza pole trapezu,  $q$  ciężar jednostkowy bryły, wreszcie  $l$  wymiar bryły

w kierunku prostopadłym do rysunku. Znajdujemy za pomocą wieloboku

sznurowego wypadkową sił  $\Delta A q$  i odpowiedni moment statyczny, który będzie się więc równał, przy zachowaniu poprzednich oznaczeń

$$M_{\alpha} = c \cdot H \quad (10)$$

Ponieważ ten sam moment możemy wyrazić w sposób następujący:

$$M_{\alpha} = W_0 \cdot \alpha_0$$

gdzie  $W_0$  oznacza wypadkową sił, działających na część  $\alpha D \alpha$  bryły, a  $\alpha_0$  odległość tej wypadkowej od przekroju  $\alpha \alpha$ , więc możemy również napisać, że

$$M_{\alpha} = \Sigma \alpha \Delta A q = \alpha_0 \Sigma \Delta A q$$

gdzie  $\alpha$  jest to odległość środka ciężkości każdego z pól  $\Delta A$  od przekroju  $\alpha \alpha$ .

Tutaj sumę  $\Sigma \Delta A q$  możemy przekształcić w następujący sposób:

$$\Sigma \Delta A q = q \Sigma \Delta A = A_0 \cdot q$$

gdzie  $A_0$  jest to pole  $\alpha D \alpha$ .

Przy  $q = 1 \text{ k/cm}^1$  otrzymamy, że

$$M_{\alpha} = A_0 \cdot \alpha_0 \quad (11)$$

Moment ten nazywamy momentem statycznym pola  $\alpha D \alpha$  względem osi  $\alpha \alpha$ . W podobny sposób możemy obliczyć również i moment statyczny całego pola  $\alpha D G \alpha$  względem osi  $\alpha_1 \alpha_1$ . Momenty statyczne pól będziemy oznaczali literą  $S$ , wobec czego wzór (11) przybierze postać następującą:

$$S_{\alpha} = A_0 \cdot \alpha_0 \quad (12)$$

O ile pole  $\Delta A$  jest nieskończenie małe, to moment statyczny pola otrzymujemy ze wzoru

$$S = \int \alpha dA \quad (13)$$

gdzie całka jest odniesiona do danego pola, zaś  $\alpha$  ma to samo znaczenie, co wyżej.

Z powyższych rozważań, a w szczególności ze wzoru (12) wynika, że moment statyczny całego pola danej figury względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości tego pola równa się zeru, gdyż w tym wypadku odległość  $\alpha_0 = 0$ .

Dla momentów statycznych figur prostych łatwo możemy otrzymać wzory zamknięte w postaci nieskomplikowanej.

Dla prostokąta, przedstawionego na rys. 44 moment statyczny pola  $AA'B'B$  względem osi  $BB'$  równa się:

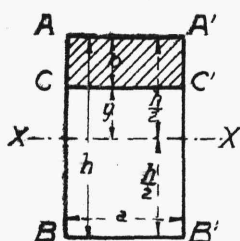
$$S_B = \frac{a \cdot h^2}{2} \quad (14)$$

gdyż suma  $\Sigma \Delta A = ah$ , zaś odległość środka ciężkości prostokąta  $AA'B'B$  od osi  $BB'$  wynosi  $\frac{h}{2}$ .

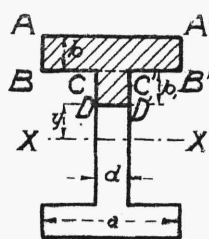
Moment statyczny części  $AA'C'C$  prostokąta  $AA'B'B$  względem osi  $XX$ , przechodzącej przez środek ciężkości prostokąta, wyrazi się wzorem:

$$S_x = a \cdot b \left( y + \frac{b}{2} \right) \quad (14')$$

gdzie  $y$  oznacza odległość prostej  $CC'$  od osi  $XX$ .



Rys. 44.

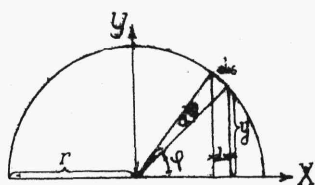


Rys. 45.

Moment statyczny części  $AA'B'C'D'DCBA$  przekroju dwuteowego, przedstawionego na rys. 45 względem osi  $XX$  znajdujemy ze wzoru:

$$S_x = b_1 \cdot d \left( y + \frac{b_1}{2} \right) + a \cdot b \left( y + b_1 + \frac{b}{2} \right) \quad (15)$$

dla którego oznaczniki są wskazane na rysunku.



Rys. 46.

Moment statyczny pola połowy koła względem średnicy otrzymać możemy, jako sumę momentów statycznych nieskończenie małych pól  $y dx$  (rys. 46) względem tej-że średnicy. Mamy więc, że

$$S_x = \int y dx \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \int y^2 dx$$

Wstawiając pod znak całki  $y^2 = r^2 - x^2$  i wypełniając całkowanie w granicach od  $-r$  do  $+r$ , dochodzimy do wzoru następującego:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} r^2 \quad (16)$$

Odległość  $a_x$  środka ciężkości pola danej figury względem pewnej osi  $XX$  wyznaczamy ze wzoru:

$$a_x = \frac{S_x}{A}$$

gdzie  $S_x$  oznacza moment statyczny pola figury względem osi  $XX$ , zaś  $A$  pole tej figury. Wzór ten wynika bezpośrednio ze wzoru (12). Momenty statyczne pól mają zawsze wymiar  $\text{cm}^3$ .

## 2. Momenty bezwładności względem osi środkowych i osi do nich równoległych.

Momentem bezwładności szeregu sił równoległych względem danego punktu nazywamy sumę

$$J = \sum P \cdot y^2 \quad (17)$$

gdzie  $y$  oznacza odległość danego punktu od linii działania każdej z sił  $P$ .

Gdy mamy do czynienia z siłami ciężkości, w szczególności w razie zadania płaskiego, omówionego w paragrafie poprzednim, wzór (17) otrzymuje postać:

$$J = \sum \Delta A \cdot q \cdot y^2 \quad (18)$$

W szczególnym wypadku, gdy  $q = 1 \text{ k/cm}^3$ , mówimy, iż mamy do czynienia z momentem bezwładności pola. Z tym tylko wypadkiem mamy właściwie do czynienia w mechanice budowli.

W razie krzywoliniowego obwodu pola suma (18) przeistacza się w całkę następującą:

$$J = \int_A y^2 dA \quad (19)$$

Wskaźnik  $A$  przy znaku całki oznacza tu, że całkowanie dotyczy całej powierzchni pola  $A$ .

W ogólnym wypadku obliczenie  $J$  wykonywamy, wyzyskując pewne właściwości wieloboku sznurowego lub, ściślej, krzywej sznurowej.

Chcemy, dajmy na to, obliczyć moment bezwładności pola  $A$  (rys. 47) względem osi  $X_0X_0$ , przechodzącej przez jej środek ciężkości (oś środkową). Dzielimy pole  $A$  prostami, równoległymi do  $X_0X_0$  na paski o polu  $dA$  i zaczepiamy do środków ciężkości pasków wyobrażalne siły równe liczbowo  $dA$ . Rys 47a i 47b przedstawiają dla sił  $dA$  odpowiednio wielobok sił i krzywą sznurową.