

Stałą całkowania C obliczymy z warunku, że ciśnienie na powierzchni swobodnej $p = p_0$ przy $x = 0$ i $z = 0$. W danym przypadku $C = p_0$.

Uwzględniając wartość C w równaniu (2.15) otrzymamy ciśnienie w dowolnym punkcie M cieczy w naczyniu poruszającym się ze stałym przyspieszeniem poziomym a

$$p = p_0 - \frac{\rho}{g} (a x + g z). \quad (2.16)$$

2.6.2. CIECZ ZAWARTA W NACZYNIU WIRUJĄCYM DOKOŁA OSI PIONOWEJ

W tym przypadku ciecz zawarta w naczyniu otwartym wirującym dokoła osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω pozostaje pod działaniem siły ciężkości i siły odśrodkowej $M \omega^2 r$ (rys.2.6). W czasie obrotu ciecz pozostaje w stanie względnego spoczynku, ponieważ nie zachodzi przemieszczenie się elementów względem ścian naczynia.

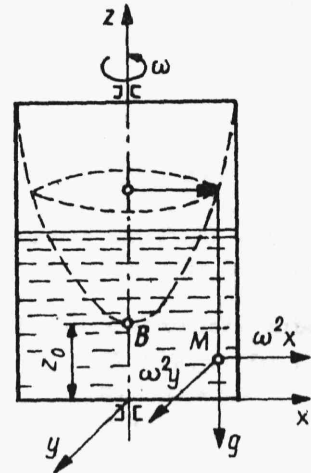
Składowe jednostkowej siły masowej w dowolnym punkcie $M(x, y, z)$ wynoszą:

$$X = \omega^2 x; \quad Y = \omega^2 y; \quad Z = -g. \quad (2.17)$$

Równanie powierzchni swobodnej otrzymamy z równania (2.6):

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0,$$

$$dz = \frac{\omega^2}{g} (x dx + y dy).$$



Rys.2.6

Po scałkowaniu

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) + C. \quad (2.18)$$

W punkcie $B(x = 0, y = 0, z = z_0)$ otrzymamy $C = z_0$. Podstawiając C do równania (2.18) otrzymamy

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2). \quad (2.19)$$

Jak wynika z równania (2.19) powierzchnia swobodna w danym przypadku przybiera kształt paraboloidy obrotowej.

Ciśnienie w dowolnym punkcie M, oddalonym o r od osi obrotu wyznaczmy z równania (2.2), uwzględniając wartości (2.17):

$$dp = \rho \omega^2 (x dx + y dy) - \rho g dz,$$

stąd

$$p = \gamma \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) - \gamma z + C_1. \quad (2.20)$$

Przyjmując na powierzchni swobodnej ciśnienie $p = p_0$, otrzymamy w punkcie B ($x = 0, y = 0, z = z_0$) wartość stałej $C_1 = p_0 + \gamma z_0$. Podstawiając tę zależność do równania (2.20) otrzymamy rozkład ciśnienia w cieczy $p(x, y, z)$

$$p = p_0 + \gamma (z_0 - z) + \gamma \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2). \quad (2.21)$$

Przykład 2.1. Zbiornik cylindryczny, zamknięty od góry o promieniu $R = 0,5$ m i wysokości $H = 0,2$ m, wypełniony cieczą do wysokości $h = 0,05$ m, wprawiono w ruch obrotowy dookoła osi pionowej. Określić liczbę obrotów naczynia n z warunku, że powierzchnia swo-

bodna cieczy przyjęła kształt ściętej paraboloidy o stosunku $\frac{r_1}{r_2} = \delta = 1,01$ (rys.2.7).

Rozwiązanie. Równanie powierzchni swobodnej w przyjętym (rys.2.7) układzie współrzędnych będzie

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z, \quad \text{ponieważ } z_0 = 0.$$

Współrzędne punktów należących do powierzchni swobodnej $A(z_1, r_1)$; $B(z_2, r_2)$ podstawione do równania powierzchni swobodnej muszą spełniać to równanie i wówczas otrzymamy:

$$\frac{\omega^2 r_1^2}{2g} = z_1,$$

$$\frac{\omega^2 r_2^2}{2g} = z_2.$$

Po scałkowaniu otrzymamy objętość ściętej paraboloidy

$$V_{\text{parab. śc.}} = \frac{\pi}{2} (r_1^2 + r_2^2) (z_1 - z_2) = \frac{\pi}{2} r_2^2 (\delta^2 + 1) H,$$

którą podstawimy do zależności określającej porównanie objętości

$$\pi R^2 h = \pi R^2 H - \frac{1}{2} \pi r_2^2 (\delta^2 + 1) H,$$

a stąd

$$r_2^2 = \frac{2R^2(H - h)}{H(\delta^2 + 1)}.$$

Porównując wartość r_2^2 z otrzymaną już poprzednio mamy

$$\frac{2R^2(H - h)}{H(\delta^2 + 1)} = \frac{2g H}{\omega^2(\delta^2 - 1)}.$$

Rozwiązując tę zależność względem ω otrzymamy

$$\omega = \frac{H}{R} \left[\frac{g(\delta^2 + 1)}{(H - h)(\delta^2 - 1)} \right]^{0,5}$$

Liczbę obrotów naczynia n określimy z zależności

$$n = \frac{30}{\pi} \omega = \frac{30}{\pi} \frac{H}{R} \left[\frac{g(\delta^2 + 1)}{(H - h)(\delta^2 - 1)} \right]^{0,5},$$

a po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy

$$n = \frac{30}{\pi} \frac{0,2}{0,5} \left[\frac{9,81 \cdot (1,01^2 + 1)}{(0,2 - 0,05)(1,01^2 - 1)} \right]^{0,5} = 309,65 \text{ obr/min.}$$

Przykład 2.2. Cylindryczne naczynie o średnicy D , całkowicie wypełnione cieczą o ciężarze właściwym γ obraca się dookoła osi pionowej z prędkością kątową ω .

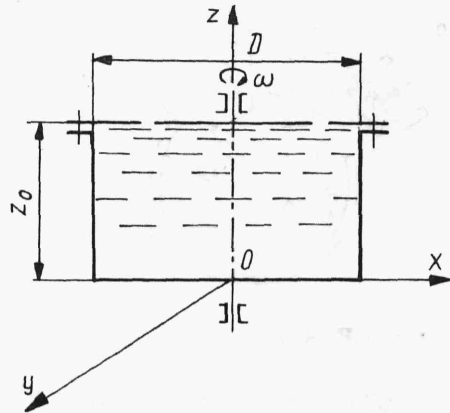
Określić siłę rozrywającą śruby łączące pokrywę z naczyniem. Ciężar pokrywy pominąć (rys.2.8).

Rozwiązanie. Rozkład ciśnień w cieczy $p(x,y,z)$ określimy z równania (2.21)

$$p - p_0 = \gamma(z_0 - z) + \gamma \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2).$$

Ponieważ $x^2 + y^2 = r^2$ o-
trzymamy

$$p - p_0 = \gamma(z_0 - z) + \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$



Rys.2.8

Na pokrywie $z = z_0$ i wówczas ciśnienie w dowolnym punkcie na pokrywie $p = f(r)$ możemy określić jako

$$p - p_0 = \gamma \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Siła działająca na pokrywę

$$P = \int_0^R 2 \pi r dr \Delta p = \frac{\pi \gamma \omega^2}{g} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \gamma \omega^2 D^4}{64g}.$$

A więc siła rozrywająca śruby łączące pokrywę z naczyniem wynosi

$$P = \frac{\pi \gamma \omega^2 D^4}{64g}.$$

2.7. PRAWO PASCALA

Rozważmy naczynie wypełnione cieczą i zamknięte szczelnie dopasowanym tłokiem (rys.2.9). Obierzmy w cieczy dwa dowolne punkty