

Rys. 2.30

Siła podnosząca przy uwzględnieniu ciężaru własnego

$$R = G \sin \alpha + (P + G \cos \alpha) f =$$

$$= 200 \cdot 9,81 \cdot 0,906 + (19100 + 200 \cdot 9,81 \cdot 0,42) \cdot 0,4 = 9731,52 \text{ N.}$$

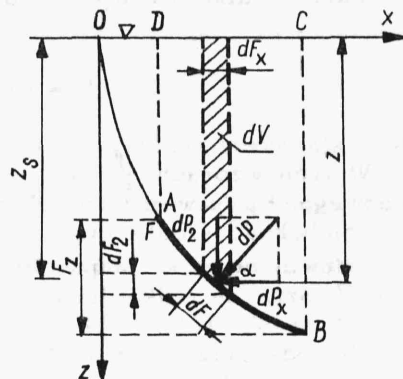
2.11. PARCIE CIECZY NA POWIERZCHNIE KRZYWE

Parcie na krzywą powierzchnię można przedstawić jako sumę geometryczną wektorów parć elementarnych, prostopadłych do odpowiednich elementów rozważanej powierzchni i działających w różnych kierunkach. Obliczanie parcia sprowadza się do znalezienia jego rzutów na kierunki osi współrzędnych.

Rozważmy prosty przypadek powierzchni cylindrycznej AB, której tworzące są prostopadłe do płaszczyzny x z (rys. 2.31). Skierujmy oś x wzdłuż powierzchni swobodnej cieczy, a oś z pionowo w dół.

Obierzmy na powierzchni F element dF o głębokości z pod zwierciadłem cieczy. Parcie elementarne w kierunku prostopadłym do powierzchni elementu będzie równe

$$dP = \gamma z dF.$$



Rys. 2.31

ci:

$$dP_x = \gamma z dF \cos \alpha,$$

$$dP_z = \gamma z dF \sin \alpha.$$

Wyrażenie $dF \sin \alpha$ i $dF \cos \alpha$ są odpowiednio równe rzutom dF_x i dF_z elementu dF na płaszczyznę poziomą yOx i pionową yOz .
Uwzględniając więc zależności:

$$dF_x = dF \sin \alpha \quad \text{oraz} \quad dF_z = dF \cos \alpha,$$

otrzymamy:

$$dP_x = \gamma z dF_z,$$

$$dP_z = \gamma z dF_x.$$

Całkując te wyrażenia po powierzchni F otrzymamy składową poziomą P_x i pionową P_z parcia P cieczy, pozostającej pod działaniem sił ciężenia na rozważaną powierzchnię krzywą:

$$P_x = \gamma \int_F z dF_z = \gamma z_s F_z, \quad (2.43)$$

$$P_z = \gamma \int_F z dF_x = \gamma \int_V dv = \gamma V. \quad (2.44)$$

Parcie całkowite będzie równe

$$P = (P_x^2 + P_z^2)^{0,5}.$$

W tych wzorach $\int_F z dF_z = z_s F_z$ wyraża moment statyczny rzutu pionowego F_z powierzchni F względem powierzchni swobodnej cieczy, z_s - głębokość środka ciężkości S rzutu pionowego F_z , $dV = z dF_x$ przedstawia objętość słupa cieczy znajdującej się nad elementem dF oraz V oznacza całkowitą objętość ABCD cieczy nad rozważaną powierzchnią F .

Na podstawie wzorów (2.43) i (2.44) można sformułować następujące zasady obliczenia obu składowych parcia.

Składowa pozioma P_x parcia na powierzchnię krzywą równa jest parciu na rzut tej powierzchni na płaszczyznę pionową. Składowa pio-

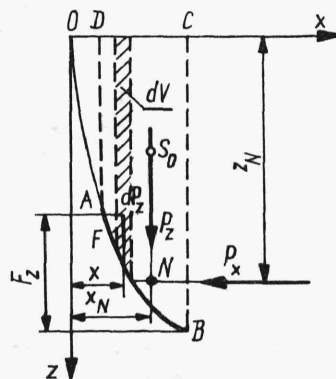
nowa P_z parcia na powierzchnię krzywą równa się ciężarowi cieczy (obszar ABCD), ograniczonej od dołu rozpatrywaną powierzchnią.

Parcie całkowite P przechodzi przez punkt N o współrzędnych x_N, z_N (rys. 2.32). Współrzedną x_N kierunku działania składowej pionowej parcia P_z można wyrazić

$$x_N = \frac{\int_F x dP_z}{P_z}.$$

Zważywszy, że $P_z = \gamma V$ oraz $dP_z = \gamma dV$, otrzymamy

$$x_N = \frac{\int_V x dV}{V}.$$



Rys. 2.32

Z zależności tej wynika, że parcie pionowe P_z przechodzi przez środek geometryczny S_0 obszaru cieczy ABCD.

Drugą współrzedną punktu $N - z_N$ obliczymy ze wzoru (2.39)

$$z_N = z_s + \frac{J_s}{z_s F_z}.$$

We wzorze tym J_s oznacza moment bezwładności rzutu pionowego powierzchni F_z . Współrzedna z_N określa kierunek działania parcia poziomego P_x .

Kierunek działania parcia P można określić następującą zależnością

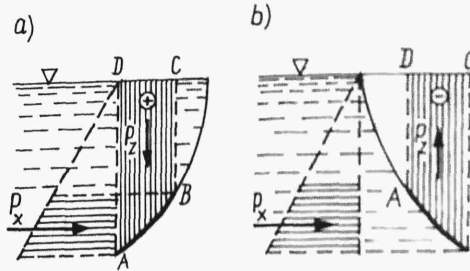
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_z}{P_x} \quad (\alpha - \text{kąt nachylenia parcia } P).$$

W zależności od kształtu powierzchni zakrzywionej rozróżniamy dwa rodzaje parcia pionowego:

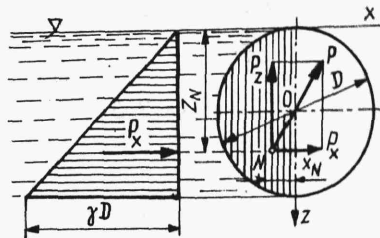
- 1) dodatnie P_z , gdy ciecz wypełnia obszar nad powierzchnią zakrzywioną (rys. 2.33a);
- 2) ujemne P_z , gdy obszar ten nie jest wypełniony cieczą (rys. 2.33b).

Parcie P_z dodatnie skierowane jest w dół, a ujemne do góry.

Przykład 2.8. Obliczyć parcie cieczy na powierzchnię zewnętrzną połowy walca o średnicy D i jednostkowej szerokości ($b = 1 \text{ m}$) oraz określić linię działania parcia P (rys. 2.34).



Rys. 2.33



Rys. 2.34

Rozwiązanie. Składową poziomą P_x obliczymy ze wzoru (2.43)

$$P_x = \gamma \frac{1}{2} D D b = \frac{1}{2} \gamma D^2.$$

Na podstawie wzoru (2.44) składowa pionowa P_z będzie równa

$$P_z = \gamma \frac{1}{2} \frac{\pi D^2}{4} b = \frac{\pi}{8} \gamma D^2.$$

Parcie całkowite

$$P = (P_x^2 + P_z^2)^{0,5} = \frac{1}{2} \gamma D^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{16} \right)^{0,5}.$$

Składowa pozioma parcia P_x przechodzi przez środek ciężkości wykresu ciśnień, a więc

$$z_N = \frac{2}{3} D.$$

Składowa pionowa P_z przechodzi przez środek ciężkości półcylindra

$$x_N = \frac{2}{3} \frac{D}{\pi}.$$

Parcie P przechodzi przez punkt N o współrzędnych:

$$x_N = \frac{2}{3} \frac{D}{\pi} \quad \text{i} \quad z_N = \frac{2}{3} D.$$

Kierunek działania całkowitego parcia P określimy z warunku momentów względem osi O cylindra

$$P a = P_x \left(z_N - \frac{D}{2} \right) - P_z x_N,$$

gdzie a oznacza ramię parcia P względem osi O.

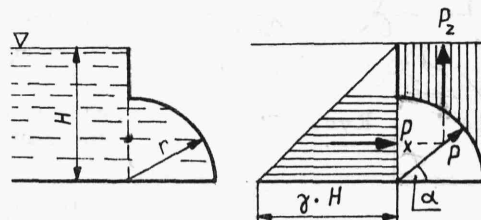
Po podstawieniu powyższych zależności

$$P a = \frac{1}{2} \gamma D^2 \left(\frac{2}{3} D - \frac{D}{2} \right) - \frac{\pi}{8} \gamma D^2 \frac{4}{6} \frac{D}{\pi} = 0.$$

Ponieważ $P \neq 0$, to $a = 0$, czyli parcie P przechodzi przez oś cylindra. Kierunek działania parcia P jest więc określony dwoma punktami N i O.

Przykład 2.9. Obliczyć parcie wody ($\gamma = 1 \text{ T/m}^3$) na powierzchnię wewnętrzną ćwiartki walca o promieniu $r = 0,4 \text{ m}$ i długości $l = 0,8 \text{ m}$. Wysokość napełnienia zbiornika $H = 1,2 \text{ m}$ (rys.2.35).

Rozwiązanie. Składowa pozioma parcia jest równa



Rys.2.35

$$\begin{aligned} P_x &= \gamma \left(H - \frac{r}{2} \right) r l = 1 \cdot \left(1,2 - \frac{0,4}{2} \right) 0,4 \cdot 0,8 = \\ &= 0,32 \text{ T} = 3139,2 \text{ N}. \end{aligned}$$

Składową pionową obliczamy z objętości wykresu

$$\begin{aligned} P_z &= \gamma \left(H r l - \frac{1}{4} \pi r^2 l \right) = \gamma r l \left(H - \frac{\pi}{4} r \right) = \\ &= 1 \cdot 0,4 \cdot 0,8 \left(1,2 - \frac{3,14}{4} \cdot 0,4 \right) = 0,284 \text{ T}. \end{aligned}$$

Parcie całkowite

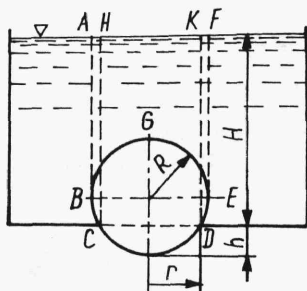
$$P = (0,32^2 + 0,284^2)^{0,5} = 0,426 \text{ T} = 4179,06 \text{ N}.$$

Kąt nachylenia parcia P do poziomu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_z}{P_x} = \frac{0,284}{0,32} = 0,887,$$

czyli

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0,887 = 41^\circ 34'.$$



Rys.2.36

Przykład 2.10. Okrągły otwór w dnie naczynia napełnionego wodą zakryto kulą o promieniu $R = 20 \text{ cm}$ i ciężarze właściwym $\gamma_k = 7800 \text{ kG/m}^3$. Obliczyć siłę P potrzebną do uniesienia kuli, jeżeli $H = 4 R$, $h = \frac{R}{2}$ (rys.2.36).

Rozwiązanie. Na kulę działają: ciężar kuli G i parcie cieczy. W tym przypadku mamy tylko składową pionową P_z , ponieważ na skutek symetrii składowa pozioma parcia jest równa zero. Siła potrzebna do uniesienia kuli wynosi

$$P \geq G + P_z.$$

Ciężar kuli

$$G = \frac{4}{3} \pi R^3 \gamma_k.$$

Parcie cieczy działające na kulę

$$P_z = \gamma_{H_2O} [V_{n.k} - (V_{nk} + V_{k.z} - V_w)] = \gamma_{H_2O} (V_w - V_{k.z}),$$

gdzie: $V_{n.k}$ - objętość nad powierzchnią kuli,

$V_{k.z}$ - objętość zanurzonej części kuli,

V_w - objętość walca o promieniu r i wysokości H .

Promień otworu w dnie naczynia równy jest

$$r = \left[R^2 - \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right]^{0,5} = \frac{R}{2} \sqrt{3}.$$

Objętość czasy kuli wystającej na zewnątrz naczynia

$$V_{cz.k.} = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h) = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \left(3R - \frac{R}{2} \right) = \frac{5}{24} \pi R^3.$$

A więc po odpowiednim podstawieniu otrzymamy objętości:

$$V_{k.z} = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{5}{24} \pi R^3 = \frac{9}{8} \pi R^3.$$

$$V_w = \pi r^2 H = \pi \left(\frac{R}{2} \sqrt{3} \right)^2 4R = 3 \pi R^3.$$

Siła potrzebna do uniesienia kuli wyniesie:

$$\begin{aligned} P &> \frac{4}{3} \pi R^3 \gamma_k + \left(3 \pi R^3 - \frac{9}{8} \pi R^3 \right) \gamma_{H_2O} = \pi R^3 \left(\frac{4}{3} \gamma_k + \frac{15}{8} \gamma_{H_2O} \right) = \\ &= \pi 0,2^3 \left(\frac{4}{3} \cdot 7800 + \frac{15}{8} \cdot 1000 \right), \end{aligned}$$

czyli

$$P > 306,9 \text{ kG} \quad \text{lub} \quad P > 3011,67 \text{ N}.$$

2.12. RÓWNOWAGA CIAŁ PŁYWAJĄCYCH

2.12.1. PRAWO ARCHIMEDESA

Rozważmy ciało dowolnego kształtu o objętości V zanurzone całkowicie w cieczy (rys.2.37). Na zamkniętą powierzchnię krzywą tego ciała działa parcie, które można określić za pomocą jego składowych w kierunku pionowym i poziomym.