

3.6.6. ZASTOSOWANIE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ DO BADANIA PŁASKIEGO RUCHU POTENCJALNEGO

Funkcja $F(z)$ zmiennej zespolonej $z = x + i y$ składa się z części rzeczywistej i urojonej, a mianowicie

$$F(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y).$$

W równaniu tym $i = \sqrt{-1}$, zaś φ i ψ - to rzeczywiste funkcje współrzędnych x i y . Łatwo wykazać, że funkcje te spełniają równanie Laplace'a. W tym celu wyznaczmy pochodne funkcji $F(z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Rozpatrując F jako funkcję z , otrzymamy

$$\nabla^2 F = \frac{d^2 F}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{d^2 F}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d^2 F}{dz^2} - \frac{d^2 F}{dz^2} = 0,$$

a więc

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

lub uwzględniając podane wyżej zależności

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Z równania tego wynika, że zarówno część rzeczywista, jak i urojona są równe zeru:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

A więc zarówno część rzeczywista φ , jak i urojona ψ są funkcjami harmonicznymi.

Znajdźmy teraz pierwsze pochodne analitycznej funkcji zmiennej zespolonej

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dz} = 0.$$

Podstawiając podane wyżej wartości pierwszych pochodnych, otrzymamy następujące równanie

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0.$$

Wynika stąd, że funkcja φ i ψ spełniają następujące warunki:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Powyższe warunki są identyczne z zależnością (3.24) między funkcją prądu i potencjałem prędkości w płaskim ruchu potencjalnym płynu nieściśliwego. Wykazaliśmy również, że funkcje φ i ψ spełniają równanie Laplace'a. Wynika stąd, że każda funkcja analityczna zmiennej zespolonej $F(z) = \varphi + i\psi$ przedstawia obraz płaskiego ruchu potencjalnego i nosi nazwę potencjału zespolonego przepływu. Część rzeczywista φ tej funkcji określa potencjał prędkości, a część urojona ψ - funkcję prądu.

Potencjał zespolony $F(z)$ ma w każdym punkcie badanego obszaru pochodną

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_x - i v_y.$$

Pochodną potencjału zespolonego nazywa się prędkością zespoloną.