

Równanie powyższe nosi nazwę równania ciągłości dla strugi.  
Równanie ciągłości dla strumienia płynu nieściśliwego

$$F v_{\text{śr}} = Q = \text{const} \quad (3.3)$$

oznacza, że iloczyn średniej prędkości przez pole przekroju jest stały w każdym przekroju strumienia.

Prędkość średnią obliczamy ze wzoru

$$v_{\text{śr}} = \frac{1}{F} \int_F v_i dF,$$

gdzie  $v_i$  oznacza prędkości w każdym punkcie przekroju.

Natężenie objętościowe strumienia  $Q$  można wyrazić stosunkiem objętości płynu  $\Delta V$ , przepływającej przez dany przekrój strumienia, do czasu przepływu  $\Delta t$ , a więc

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Średnią prędkość w przekroju poprzecznym możemy obliczyć z zależności (3.3).

Podane równania ciągłości dla strugi i strumienia odnoszą się do przepływów jednoparametrowych, to znaczy, że dla opisanego przepływu wystarczy jedna tylko zmienna niezależna, a mianowicie odległość rozpatrywanego przekroju od dowolnego punktu początkowego, mierzona wzdłuż środkowej linii rurki prądu.

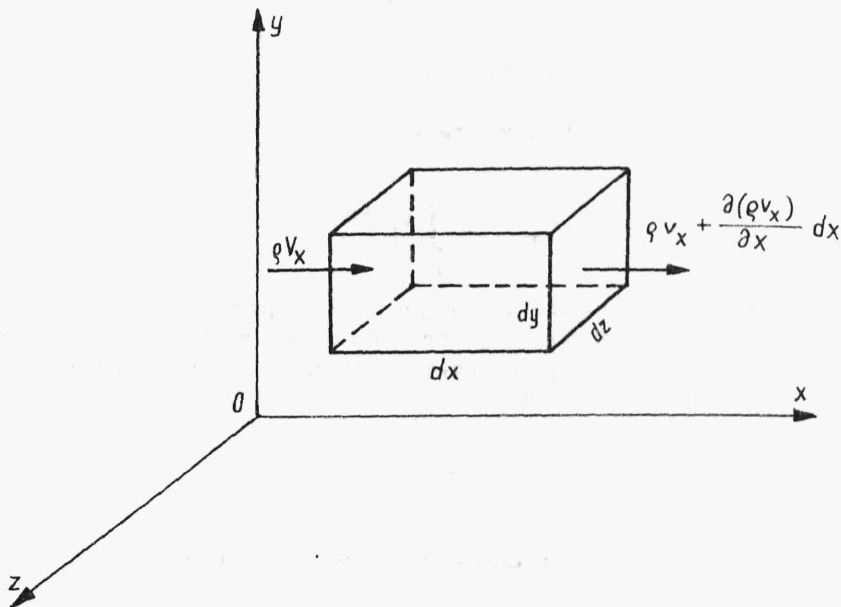
### 3.3. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

W rozważaniach przepływów przestrzennych, w których zwykle wyznacza się składowe prędkości  $v_x, v_y, v_z$  ciśnienie  $p$  oraz gęstość  $\rho$  jako funkcje współrzędnych przestrzennych  $x, y, z$  i czasu  $t$ , równanie ciągłości wyprowadza się z równości masy płynu, która wpływa i wypływa z elementarnego prostopadłościanu o krawędziach  $dx, dy, dz$  (rys.3.6).

Rozważmy ogólny przypadek nieustalonego przepływu płynu ściśliwego przyjmując  $\rho(x, y, z, t)$ .

W kierunku osi  $x$  wpływa w czasie  $dt$  do elementarnego prostopadłościanu przez lewą ściankę o powierzchni  $dy dz$  masa płynu  $\rho v_x dy dz dt$ . Przez przeciwną ściankę, w tym samym czasie, wypływa masa płynu równa

$$\left( \rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right) dy dz dt.$$



Rys.3.6

Przyrost masy w czasie  $dt$  jako różnica mas wpływającej i wypływającej w kierunku osi  $x$  wyniesie

$$- \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Analogiczne przyrosty masy otrzymamy przy przepływie w czasie  $dt$  w kierunku osi  $y$  i  $z$ :

$$- \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz dt,$$

$$- \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Suma tych przyrostów masy w elemencie płynu w czasie  $dt$  równa jest

$$- \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt.$$

Jeśli w czasie  $t$  gęstość wynosiła  $\rho(x, y, z, t)$ , to w czasie  $t + dt$  gęstość będzie równa

$$\rho(x, y, z, t + dt) = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt.$$

A zatem w czasie  $dt$  masa płynu wewnątrz elementu zmieni się od wartości  $\rho dx dy dz$  do wartości  $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz$ . Stąd przyrost masy w czasie  $dt$  wyniesie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt.$$

Porównując podane przyrosty masy w elemencie płynu otrzymamy:

$$- \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

lub

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

Jest to różniczkowe równanie ciągłości dla płynu ściśliwego.

Równanie (3.4) możemy przedstawić w innej postaci rozwijając poszczególne człony tego równania:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y = \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z = \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Podstawiając te wyrażenia do równania (3.4) otrzymamy

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varrho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varrho}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \varrho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Pierwsze cztery wyrazy równania stanowią pochodną zupełną gęstości względem czasu, a sumę pochodnych cząstkowych składowych prędkości w nawiasie wyrażamy jako divergencję wektora prędkości, zatem

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (3.5)$$

W przypadku ruchu ustalonego płynu ściśliwego  $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ , równanie ciągłości (3.4) przyjmie postać

$$\operatorname{div} (\varrho \bar{v}) = \frac{\partial (\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Dla płynu nieściśliwego ( $\varrho = \text{const}$ ) różniczkowe równanie ciągłości (3.4) uprości się do postaci

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

Otrzymane równanie ciągłości możemy sformułować w ten sposób, że suma cząstkowych pochodnych składowych prędkości względem odpowiednich współrzędnych w dowolnym punkcie obszaru wypełnionego przepływającym płynem jest równa zeru.

Udowodnimy jeszcze, że  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$  określa względną zmianę objętości płynu w jednostce czasu. Z równania (3.4) mamy

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt}.$$

Niech  $m = \varrho \delta$  będzie masą małego poruszającego się elementu płynu, a  $\delta$  jego objętością. W czasie ruchu płynu gęstość i objętość  $\delta$  tego elementu mogą się zmieniać, jednakże masa elementu powinna pozostać stała ( $m = \text{const}$ ).

Wówczas będziemy mieli

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d\varrho}{dt} \delta + \varrho \frac{d\delta}{dt} = 0,$$

a stąd

$$\frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt} = - \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \theta.$$

tzn. że  $\theta$  jest prędkością rozszerzania się jednostki objętości i w związku z tym nazywa się ją współczynnikiem rozszerzalności objętościowej, oczywiście dla płynu nieściśliwego  $\theta = 0$ .

Przy wyprowadzeniu równania ciągłości nie czyniliśmy żadnych ograniczeń dotyczących lepkości lub braku lepkości płynu. Równanie ciągłości w podanej powyżej postaci jest słuszne zarówno dla płynów nielepkich jak i lepkich.

### 3.4. POLA PRĘDKOŚCI POSTĘPOWEJ, ODKSZTAŁCENIA I OBROTU ELEMENTÓW PŁYNU. RÓWNANIE CAUCHY'EGO-HELMHOLTZA

#### 3.4.1. WYPROWADZENIE RÓWNAŃ CAUCHY'EGO-HELMHOLTZA

Twierdzenie Cauchy'ego-Helmholtza można sformułować w sposób następujący. Elementarny ruch dowolnego elementu płynu złożony jest z trzech składników: przesunięcia postępowego, odkształcenia i chwilowego obrotu.

Jeżeli oznaczmy prędkość w punkcie A obranym jako biegun przez  $\bar{v}_A$ , to wektor prędkości punktu M znajdującego się w nieskończenie małej odległości od bieguna A można przedstawić w postaci geometrycznej sumy trzech wektorów:  $\bar{v}_A$  - prędkości postępowej bieguna A,  $\bar{v}_1$  - prędkości odkształcenia oraz  $\bar{v}_2$  - prędkości obrotu względem chwilowej osi przechodzącej przez biegun A. A więc prędkość w punkcie M będzie równa

$$\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{v}_1 + \bar{v}_2.$$

Dla uzasadnienia tego twierdzenia rozważmy w obszarze przepływu elementarny prostopadłościan o krawędziach  $dx, dy, dz$  (rys.3.7). Oznaczmy składowe wektora prędkości  $\bar{v}$  w punkcie  $A(x, y, z)$  przez  $v_x, v_y, v_z$ . Wektor prędkości  $\bar{v}$  w punkcie  $M(x + dx, y + dy, z + dz)$  znajdującym się w ciągłym obszarze przepływu będzie równy wektorowi prędkości  $\bar{v}_A$  w punkcie  $A(x, y, z)$  powiększonemu o różniczkę zupełną wektora  $d\bar{v}$ , zatem

$$\bar{v} = \bar{v}_A + d\bar{v}.$$