

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}, \quad (4.10)$$

lub dla dwóch przekrojów strugi elementarnej otrzymamy równanie Bernoulliego dla ustalonego przepływu płynu nieściśliwego w polu sił grawitacji ziemskiej

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2. \quad (4.11)$$

4.4. INTERPRETACJA RÓWNANIA BERNOULLIEGO

Analizując równanie Bernoulliego (4.10) widzimy, że każdy jego wyraz ma wymiar długości.

Wyrazy te nazywamy następująco: $\frac{v^2}{2g}$ - wysokością prędkości, $\frac{p}{\gamma}$ - wysokością ciśnienia i z - wysokością położenia.

Równanie Bernoulliego możemy więc sformułować następująco: dla każdego przekroju strugi cieczy doskonałej, znajdującej się w ruchu ustalonym pod działaniem wyłącznie siły grawitacyjnej (ciężenia), suma wysokości prędkości, wysokości ciśnienia i wysokości położenia jest wartością stałą.

Interpretacja energetyczna równania Bernoulliego jest następująca:

wyraz $\frac{v^2}{2g}$ przedstawia energię kinetyczną cieczy w danym przekroju strugi, przypadającą na jednostkę ciężaru przepływającej cieczy, a suma $z + \frac{p}{\gamma}$ przedstawia energię potencjalną na jednostkę ciężaru cieczy.

A więc suma energii kinetycznej i potencjalnej w każdym przekroju strugi cieczy doskonałej jest wielkością stałą.

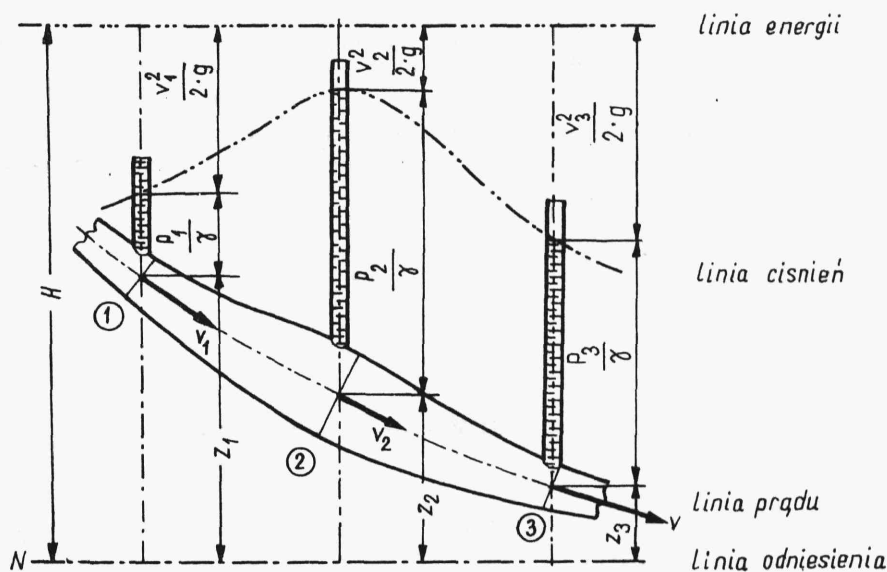
Na rysunku 4.2 pokazano następujące charakterystyczne linie związane z równaniem Bernoulliego:

- a) linia prądu wzniesiona jest ponad linią odniesienia o wartość z ,
- b) linia ciśnień - miejsce geometryczne punktów wzniesionych po-

nad poziom odniesienia o wysokość $z + \frac{p}{\gamma}$,

- c) linia energii - w przypadku cieczy doskonałej jest linią poziomą,

wzniesioną ponad poziom odniesienia o stałą wysokość $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}.$



Rys. 4.2

4.5. CAŁKA CAUCHY-LAGRANGE'A

Rozważmy ruch potencjalny cieczy doskonałej; składowe prędkości w tym ruchu wyraża się w postaci cząstkowych pochodnych potencjału prędkości $\varphi(x, y, z, t)$.

Uwzględniając w równaniu (4.2) zależności (3.15), otrzymamy:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}$$

lub

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2,$$