

gdzie:  $n_x = \cos(n, x) = \sin \beta$ ;

$n_y = \cos(n, y) = -\cos \beta$ .

Uwzględniając powyższe związki, otrzymamy

$$Q_{AB} = \int_A^B (-v_x \sin \beta + v_y \cos \beta) ds.$$

Rzuty elementu  $ds$  na kierunki osi współrzędnych są równe:

$$dx = ds \cos \beta, \quad dy = ds \sin \beta,$$

czyli

$$Q_{AB} = - \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = - \int_A^B d\psi.$$

Ostatecznie

$$Q_{AB} = \psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2).$$

A zatem, natężenie przepływu przez odcinek krzywej  $AB$  w płaskim ruchu potencjalnym równe jest różnicy funkcji prądu w punktach  $A$  i  $B$  i nie zależy od kształtu krzywej.

#### 3.6.4. PRZYKŁADY PŁASKICH PRZEPŁYWÓW POTENCJALNYCH ŹRÓDŁO I UPUST (DIPOL)

Prędkość płynu wypływającego ze źródła lub wpływającego do upustu na płaszczyźnie równa jest

$$v_r = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\pm Q}{2\pi r}.$$

Całkując to wyrażenie, otrzymamy potencjał prędkości

$$\varphi(x, y) = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln r,$$

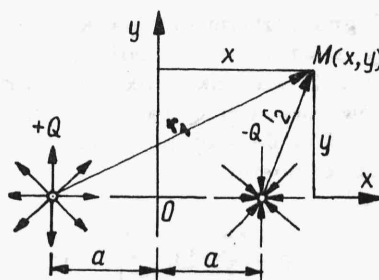
gdzie  $r = (x^2 + y^2)^{0,5}$ .

Rozważmy dwa źródła (dodatnie i ujemne) o wydatku  $Q$  położone na osi  $x$  symetrycznie względem osi  $y$  w odległości  $a$  (rys.3.13). Obierzmy na płaszczyźnie dowolny punkt  $M(x,y)$  oddalony od źródła o  $r_1$  i od upustu o  $r_2$ .

Jak widać na rysunku  $r_1$  i  $r_2$  można wyrazić następująco:

$$r_1 = \left[ (x + a)^2 + y^2 \right]^{0,5};$$

$$r_2 = \left[ (x - a)^2 + y^2 \right]^{0,5}.$$



Rys.3.13

Potencjał prędkości będzie równy

$$\varphi(x,y) = -\frac{Q}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2).$$

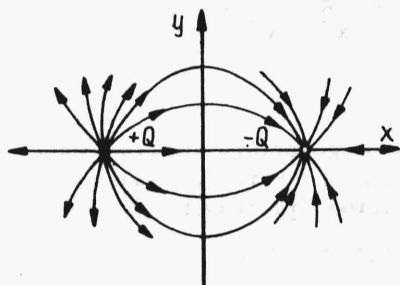
Składowe prędkości w punkcie  $M$  wynoszą:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{Q}{2\pi} \left( \frac{x + a}{r_1^2} - \frac{x - a}{r_2^2} \right),$$

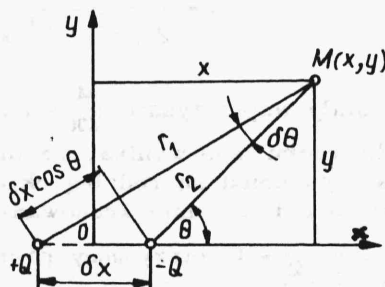
$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{Q}{2\pi} \left( \frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2} \right).$$

Jeżeli źródło i upust mają jednakowy wydatek, to wszystkie linie prądu źródła wpływają do upustu (rys.3.14).

Załóżmy, że źródło o wydatku  $+Q$  i upust o wydatku  $-Q$  zbliżyły się do siebie na nieskończenie małą odległość  $\delta x$  (rys.3.15).



Rys.3.14



Rys.3.15

W granicznym przypadku, gdy  $\delta x \rightarrow 0$ , otrzymamy jeden punkt osobliwy zawierający źródło i upust. Punkt ten nazywamy dipolem lub dubletem. Z warunku  $\delta x \rightarrow 0$  oraz  $Q\delta x = \text{const}$  wynika, że  $Q \rightarrow \infty$ . Wówczas  $\lim_{x \rightarrow 0} Q\delta x = M$ . Symbol  $M$  oznacza moment dipola.

Dla danego przypadku wzór na potencjał prędkości można przedstawić w postaci

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{Q}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{r_1 - r_2}{r_2} \right).$$

Można - jak widać na rysunku - napisać

$$r_1 - r_2 \approx \delta x \cos \Theta.$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru na potencjał prędkości otrzymamy

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{\delta x \cos \Theta}{r_2} \right).$$

Przechodząc do granicy, gdy  $\delta x \rightarrow 0$ ,  $r_2 \rightarrow r$ ,  $Q\delta x \rightarrow M$

$$\varphi = \lim \left[ \frac{Q}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{\delta x \cos \Theta}{r_2} \right) \right] = \lim \left[ \frac{1}{2\pi} \frac{Q\delta x \cos \Theta}{r_2} \right] = \frac{M \cos \Theta}{2\pi r}.$$

Uwzględniając to, że  $\cos \Theta = \frac{x}{r}$ , otrzymamy wzór na potencjał prędkości dla dipola lub źródła podwójnego

$$\varphi = \frac{M x}{2\pi r^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = m \frac{x}{x^2 + y^2},$$

gdzie stały współczynnik  $\frac{M}{2\pi} = m$ .

Ze wzoru tego wynika, że linie jednakowego potencjału prędkości dipola  $\varphi = \text{const}$  są rodziną okręgów stycznych do osi  $y$ , mających środki na osi  $x$  (linie kresowane na rys.3.16), ponieważ z zależności

$$m \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} = C \text{ otrzymamy równanie okręgu w postaci}$$

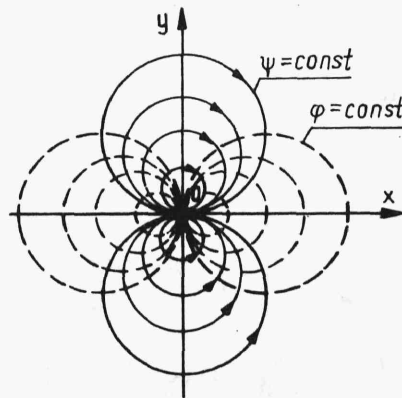
$$(x^2 - C_1)^2 + y^2 = C_1^2,$$

gdzie  $C_1 = \frac{m}{2C}$ .

Składowe prędkości w tym ruchu wynoszą:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{m(y^2 - x^2)}{(m^2 + y^2)^2};$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2mxy}{(m^2 + y^2)^2}.$$



Rys.3.16

Prędkość wypadkowa równa jest

$$v = \left( v_x^2 + v_y^2 \right)^{0,5} = \frac{m}{x^2 + y^2} = \frac{m}{r^2}.$$

A więc, prędkości elementów płynu są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów ich odległości od początku układu, w którym znajduje się punkt osobliwy.

Równanie różniczkowe linii prądu ma postać

$$d\psi = v_x dy - v_y dx = \frac{m}{(x^2 + y^2)^2} \left[ (y^2 - x^2) dy + 2xy dx \right].$$

Dla scałkowania tego równania względem x podstawimy

$$x^2 + y^2 = z,$$

skąd

$$2x dx = dz.$$

Wówczas

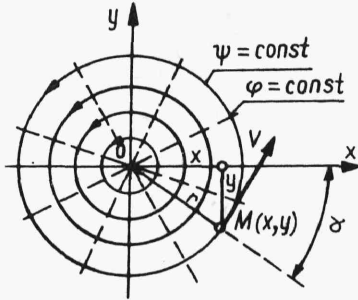
$$\psi = m y \int \frac{2x dx}{(x^2 + y^2)^2} = m y \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{m y}{z} + C(y) = -\frac{m y}{x^2 + y^2} + C(y).$$

Równanie linii prądu można przedstawić w postaci:

$$\frac{m y}{x^2 + y^2} = C$$

lub

$$x^2 + (y - c_1)^2 = c_1^2.$$



Rys.3.17

A więc linie prądu, jak pokazano na rysunku, tworzą rodzinę okręgów stycznych do osi  $x$ , których środki leżą na osi  $y$ . Początek układu stanowi równocześnie źródło i upust, czyli dipol.

Wir płaski kołowy. Zbadajmy teraz podany na rysunku 3.17 płaski ruch potencjalny określony potencjałem prędkości w postaci

$$\varphi = q \alpha = q \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right),$$

gdzie:  $q = \frac{\Gamma}{2\pi}$  ( $\Gamma$  - cyrkulacja),

$\alpha$  - kąt zawarty między osią  $x$  a promieniem  $r$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Składowe prędkości w tym ruchu będą:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( q \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = - \frac{q y}{x^2 + y^2},$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( q \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = \frac{q x}{x^2 + y^2},$$

gdzie  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Prędkość wypadkowa w punkcie  $M(x, y)$  wynosi

$$v = \left( v_x^2 + v_y^2 \right)^{0,5} = \frac{q}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Z zależności tej wynika, że prędkość jest odwrotnie proporcjonalna do promienia i nie zależy od kąta  $\alpha$ . W początku układu jest punkt

osobliwy, w którym prędkość  $v \rightarrow \infty$ . W nieskończoności ( $r \rightarrow \infty$ ) prędkość dąży do zera ( $v \rightarrow 0$ ).

Dla wyznaczenia linii prądu piszemy różniczkę zupełną funkcji prądu

$$d\psi = v_x dy - v_y dx = \frac{-q}{r^2} (y dy + x dx) .$$

Po scałkowaniu tego równania otrzymamy

$$\psi = -\frac{1}{2} q \ln r^2 + C_1 = -q \ln r + C_1 = \text{const} ,$$

stąd

$$r = \text{const} .$$

Możemy więc powiedzieć, że linie prądu tego ruchu będą kołami współśrodkowymi, linie jednakowego potencjału prędkości - prostymi, przechodzącymi przez początek układu (rys.3.17). Ruch taki nazywamy płaskim wirem kołowym.

### 3.6.5. NAKŁADANIE PRZEPŁYWÓW

Przepływ równoległy i źródło płaskie. Rozważmy źródło płaskie w początku układu i przepływ równoległy do osi  $x$  ze stałą prędkością  $v_0 = \text{const}$  (rys.3.18).

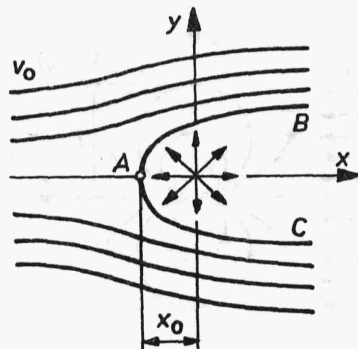
Potencjał prędkości dla tak złożonego ruchu będzie równy:

$$\varphi = v_0 x - \frac{Q}{2\pi} \ln r; \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) .$$

Składowe prędkości:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 - \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{r^2} ,$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{r^2} .$$



Rys.3.18