

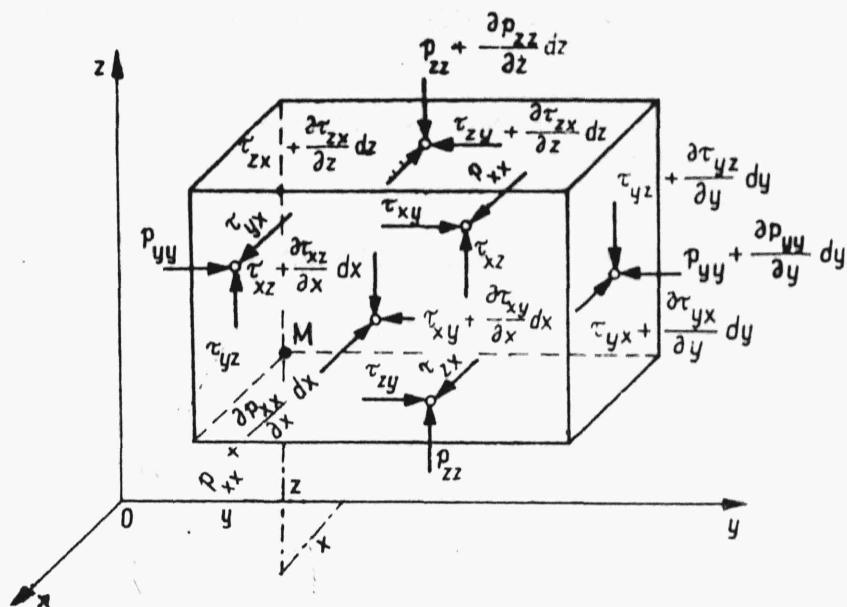
6. PODSTAWY DYNAMIKI PŁYNÓW LEPKICH

6.1. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RUCHU PŁYNU LEPKIEGO NAVIERA-STOKESA

Przy wyprowadzeniu równań różniczkowych ruchu płynu doskonałego Eulera wzięto pod uwagę, oprócz sił masowych, normalne siły powierzchniowe. W przypadku płynów lepkich należy ponadto uwzględnić styczne siły powierzchniowe (siły lepkości). W dalszych rozważaniach będziemy posługiwali się pojęciem naprężeń normalnych i stycznych, tj. stosunków odpowiednich sił powierzchniowych do powierzchni, na które działają.

Wpływ lepkości na ruch płynu lepkiego przejawia się nie tylko przez powstawanie naprężeń stycznych, ale również przez zmianę wielkości naprężeń normalnych, w porównaniu z ich wartościami w przypadku płynu doskonałego.

Dla wyprowadzenia równań różniczkowych ruchu płynu lepkiego rozpatrzmy elementarną objętość płynu w kształcie prostopadłościanu (rys. 6.1). Na każdą ściankę elementu płynu działają trzy składowe naprężenia (jedna normalna i dwie styczne). Wprowadzimy następujące ozna-



Rys. 6.1

czenia: naprężenia normalne oznaczmy przez p , a styczne przez τ . Każdy symbol naprężenia zaopatrzmy w dwa indeksy: pierwszy oznacza kierunek normalny do rozpatrywanej powierzchni, drugi zaś kierunek osi, na którą rzutowana jest dana składowa. Stan naprężeń w płynie lepkiem określa 9 funkcji skalarnych:

$$p_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} ,$$

$$\tau_{yx} \quad p_{yy} \quad \tau_{yz} ,$$

$$\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad p_{zz} .$$

Na trzech ściankach przechodzących przez punkt $M(x,y,z)$ skierowano składowe naprężenia, zgodnie z dodatnim kierunkiem osi współrzędnych, na trzech zaś pozostałych przeciwnie.

Suma wszystkich sił powierzchniowych, działających na element płynu w kierunku osi x równa jest

$$\begin{aligned} p_{xx} dy dz - \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \tau_{yx} dz dx - \\ - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx + \tau_{zx} dx dy - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = \\ = - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz . \end{aligned}$$

Uwzględniając składowe siły masowej i siły bezwładności otrzymamy równanie równowagi sił w kierunku osi x

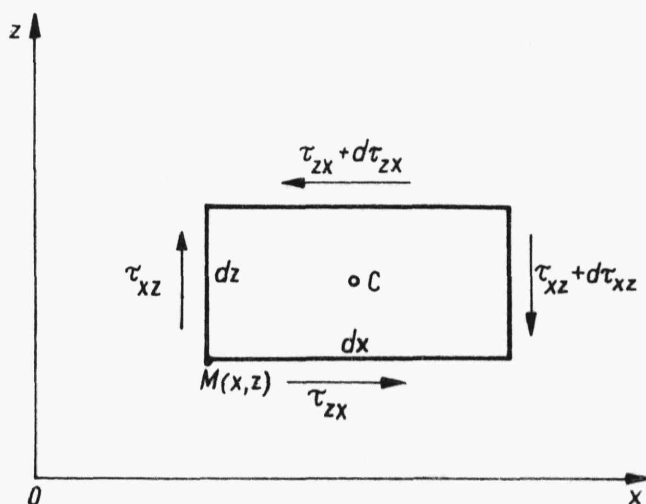
$$\frac{dv_x}{dt} \varrho dx dy dz - X \varrho dx dy dz + \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = 0 .$$

Po przekształceniu tego równania możemy analogicznie dla kierunków osi y i z napisać równania ruchu w postaci:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (6.1)$$

W dalszych rozważaniach wykazemy, że z 9 składowych naprężeń, występujących w tych równaniach 6 jest niezależnych.

Rozważmy momenty sił działających na elementarny prostopadłościan względem osi równoległej do osi y i przechodzącej przez środek C prostopadłościanu (rys.6.2).



Rys.6.2

Napišemy równanie momentów ograniczając się do wielkości małych trzeciego rzędu.

W tym przypadku pomijamy moment sił masowych jako wielkość małą czwartego rzędu; uwzględniając kierunek momentów, otrzymamy

$$\begin{aligned}\tau_{zx} dx dy \frac{dz}{2} + (\tau_{zx} + d\tau_{zx}) dx dy \frac{dz}{2} - \\ - \tau_{xz} dy dz \frac{dx}{2} - (\tau_{xz} + d\tau_{xz}) dy dz \frac{dx}{2} = 0\end{aligned}$$

lub zaniehbując wielkości małe czwartego rzędu

$$(\tau_{zx} + \tau_{zx} - \tau_{xz} - \tau_{xz}) \frac{dx}{2} \frac{dy}{2} \frac{dz}{2} = 0,$$

skąd

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

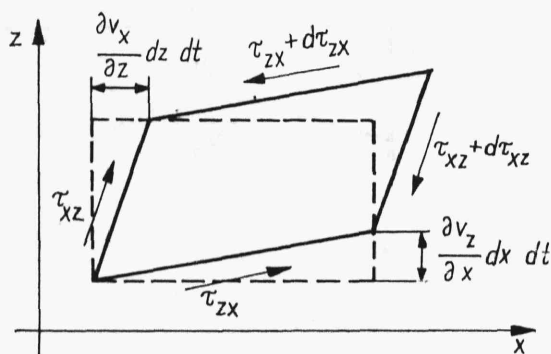
W analogiczny sposób można wykazać, że:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Tak więc stan naprężeń w płynie określają w dowolnym jego punkcie trzy naprężenia normalne i trzy naprężenia styczne.

Na podstawie wzoru Newtona $\tau = \mu \frac{dv}{dn}$ określamy wielkość naprężeń stycznych jako proporcjonalnych do odpowiednich prędkości odkształceń kątowych elementu płynu (rys.6.3)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$



Rys.6.3

Prędkość przemieszczenia się boku górnego względem dolnego wynosi $\frac{d\varphi}{dt} dz$.

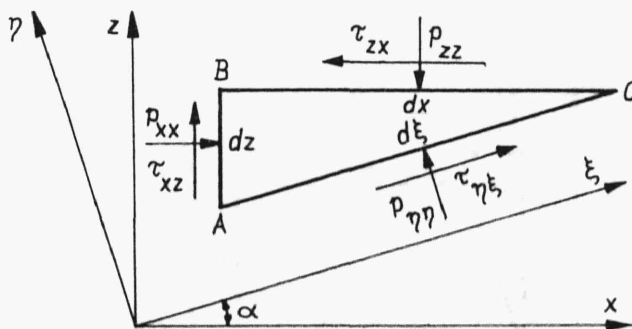
Gradient prędkości równy jest $\frac{d\varphi}{dt}$.

Tak więc naprężenia styczne wyrażą się w postaci:

$$\begin{aligned}\tau_{zx} = \tau_{xz} &= -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (6.2)$$

Naprężenia normalne p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} pod wpływem sił lepkości nie są sobie równe jak w przypadku płynu doskonałego.

Dla wyznaczenia naprężeń normalnych rozważmy element płynu w kształcie klina (rys.6.4). Zorientujmy pod kątem α do osi x , równolegle do ścianki $A C$ kierunek ξ i prostopadle do niego η . Ułożymy równanie równowagi sił, działających na rozpatrywany element płynu. Siły masowe jako wielkości małe o rząd niższe od sił powierzchniowych mogą być pominięte w równaniu.



Rys.6.4

Przyjmując jednostkową długość elementu w kierunku osi y napiszemy sumę rzutów sił powierzchniowych na kierunek ξ następująco

$$(p_{xx} dz - \tau_{zx} dx) \cos \alpha + (\tau_{xz} dz - p_{zz} dx) \sin \alpha + \tau_{\eta\xi} d\xi = 0,$$

podstawiając:

$$dx = d\xi \cos \alpha, \quad dz = d\xi \sin \alpha$$

oraz

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \tau_{\eta\xi} &= \tau_{xz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (p_{zz} - p_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \tau_{xz} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (p_{zz} - p_{xx}) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Naprężenie styczne $\tau_{\eta\xi}$ można analogicznie do zależności (6.2) wyrazić w postaci

$$\tau_{\eta\xi} = -\mu \left(\frac{\partial v_{\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \eta} \right).$$

Zależności pomiędzy odpowiednimi współrzędnymi i prędkościami w układach x, z i ξ, η dadzą się wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, & v_{\xi} &= v_x \cos \alpha + v_z \sin \alpha, \\ z &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, & v_{\eta} &= -v_x \sin \alpha + v_z \cos \alpha. \end{aligned}$$

Szukane pochodne są równe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\eta}}{\partial \xi} &= \frac{\partial v_{\eta}}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial v_{\eta}}{\partial z} \frac{dz}{d\xi} = \\ &= \left(-\frac{\partial v_x}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cos \alpha \right) \cos \alpha + \left(-\frac{\partial v_x}{\partial z} \sin \alpha + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cos \alpha \right) \cdot \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left(-\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \cos^2 \alpha \frac{\partial v_z}{\partial x} - \sin^2 \alpha \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_{\xi}}{\partial \eta} &= \frac{\partial v_{\xi}}{\partial x} \frac{dx}{d\eta} + \frac{\partial v_{\xi}}{\partial z} \frac{dz}{d\eta} = \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v_z}{\partial x} \sin \alpha \right) (-\sin \alpha) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \cos \alpha + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial v_z}{\partial z} \sin \alpha \Big) \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha \left(- \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \\ + \cos^2 \alpha \frac{\partial v_x}{\partial z} - \sin^2 \alpha \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Po uwzględnieniu tych zależności napiszemy

$$\tau_{\eta\xi} = -\mu \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \cos 2\alpha + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \sin 2\alpha \right]. \quad (6.4)$$

Porównując zależności (6.3) i (6.4) otrzymamy

$$\tau_{xz} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (p_{zz} - p_{xx}) \sin 2\alpha = \\ = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \cos 2\alpha - \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \sin 2\alpha.$$

Ponieważ

$$\tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right),$$

stąd

$$p_{zz} - p_{xx} = -2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)$$

lub

$$p_{zz} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = p_{xx} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Uogólniając tę zależność, możemy napisać

$$p_{xx} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} = p_{yy} + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} = p_{zz} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = C. \quad (6.5)$$

Stałą C określimy z tej równości

$$C = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).$$

Jeżeli średnią wartość naprężeń normalnych oznaczmy przez

$$p = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3},$$

to stała

$$C = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).$$

Podstawiając wartość C do zależności (6.5) wyznaczmy naprężenia normalne:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= p - 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\ p_{yy} &= p - 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\ p_{zz} &= p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Po podstawieniu do równań ruchu (6.1) zależności określających naprężenia styczne (6.2) i normalne (6.6) oraz po niewielkich przekształceniach otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Równania te znane są pod nazwą równań różniczkowych Naviera - Stokesa ruchu płynu lepkiego ściśliwego.

Powyższe równanie można zapisać w formie wektorowej

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{3} \nu \text{grad}(\text{div } \bar{v}).$$

Dla płynu nieściśliwego $\text{div } \bar{v} = 0$ i ostatni wyraz w równaniach (6.7) znika

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \bar{v}.$$

Równania ruchu płynu lepkiego i nieściśliwego z rozwiniętym wyrazem przyspieszenia dadzą się przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Do równań różniczkowych Naviera - Stokesa ruchu płynu nieściśliwego i lepkiego należy dołączyć jeszcze czwarte równanie ciągłości

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Łatwo można zauważyć, że z powyższych równań otrzymuje się dla płynu nielepkiego przy $\nu = 0$ znaną postać równania Eulera

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$